**Technische Universität Berlin** **Wintersemester 2014/2015**
**Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften**
**Institut für Mathematik**
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

# Numerische Mathematik I

## 6. Übungsblatt: Fixpunktiteration, Newton-Verfahren

**Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 10. Dezember 2014)**

**Aufgabe 1:** **(3 Punkte)**
Führen Sie einen Schritt mit dem Newton Verfahren aus, um das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy} + x^2 + y - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Benutzen Sie die Startwerte $x_0 = 1$ und $y_0 = 0$.

**Aufgabe 2:** **(5 Punkte)**
Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, d.h. alle Eigenwerte sind reell und $(x^*, \lambda^*) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ist ein Eigenpaar mit $\|x^*\|_2 = 1$, genau dann wenn $(x^*, \lambda^*)$ eine Nullstelle der Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x - Ax \\ \frac{1}{2}\|x\|_2^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ist.

1. Geben Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung von $(x^*, \lambda^*)$ an. *Hinweis: Die Inverse der Jacobimatrix braucht nicht explizit bestimmt zu werden.*
2. Sei $(x^*, \lambda^*)$ ein Eigenpaar, sodass $\lambda^*$ die Vielfachheit 1 hat. Zeigen Sie, dass $Df(x^*, \lambda^*)$ regulär ist.

**Aufgabe 3:** **(7 Punkte)**
Gegeben Sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man betrachte die durch

$$Z_{k+1} := Z_k + Z_k(E - AZ_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

definierte Folge von Matrizen $\{Z_k\}_{k=0,1,\ldots}$. Zeigen Sie:

(a) Für $S_k := E - AZ_k$ gilt $S_{k+1} = S_k S_k$ und $\|E - AZ_0\| < 1$ ist hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\{Z_k\}$ gegen $A^{-1}$ für eine submultiplikative Matrixnorm $\|\cdot\|$.

(b) Das Verfahren (1) ist lokal quadratisch konvergent.

(c) Mit $AZ_0 = Z_0 A$ gilt auch $AZ_k = Z_k A$ für alle $k \geq 0$.

**Programmieraufgabe 6:** (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 11. Dezember 2014)
Schreiben Sie Programme `bisek`, `regulaFalsi` und `newton` die für eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die skalare Gleichung $f(x) = 0$ lösen. Der Aufruf der Programme soll mit

```
[x,xa,fa] = bisek(f, x0, x1, tol, nmax)
[x,xa,fa] = regulaFalsi(f, x0, x1, tol, nmax)
[x,xa,fa] = newton(f, df, x0, tol, nmax)
```

erfolgen. Eingabeparameter sind

| | |
|---|---|
| `f` | Handle der MATLAB-Funktion für $f$ mit Schnittstelle `y = f(x)`, |
| `df` | Handle der MATLAB-Funktion für $f'$ mit Schnittstelle `y = df(x)`, |
| `x0`, `x1` | Startpunkt $x_0$ (für Newtonverfahren), bzw. Startintervall $[x_0, x_1]$ für Bisektionsverfahren und Regula Falsi, |
| `tol` | Toleranz $\epsilon$, |
| `nmax` | maximale Anzahl von Iterationen $n_{\max}$, |

und Ausgabeparameter

| | |
|---|---|
| `x` | Approximation der Nullstelle, |
| `xa` | Vektor der Iterationswerte $x_0, x_1, \ldots$, |
| `fa` | Vektor der Iterationswerte $f(x_0), f(x_1), \ldots$. |

Dabei soll die Iteration abgebrochen werden, falls

$$|f(x_n)| + |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

oder die Anzahl der Iterationen $n_{\max}$ übersteigt.
*Hinweis:* Funktionen können durch sogenannte *function handles* übergegeben werden, wobei *anonymous functions* ebenfalls nützlich sind. Für weitere Informationen bitte unter den entsprechenden Stichworten in der MATLAB-Hilfe suchen.

Es seien die Funktionen

(a) $f_1(x) = x^3 - 20$,

(b) $f_2(x) = (x - \pi)^2 \tan(x)$

gegeben. Approximieren Sie die Nullstellen der Funktionen im Intervall $[2, 4]$ mit Hilfe des Bisektionsverfahrens, des Newtonverfahrens und der Regula Falsi.
Als Startwerte verwende man das Intervall $[2, 4]$ beim Bisektionsverfahren und der Regula Falsi und $x_0 = 2$ beim Newtonverfahren. Die maximale Anzahl von Iterationen sei auf 40 beschränkt und die Toleranz sei $\epsilon = 10^{-6}$.

1. Geben Sie für jede Funktion und jedes Verfahren eine formatierte Tabelle bestehend aus Iterationszahl $n$, der approximierten Nullstelle $x_n$ und dem Funktionswert $f(x_n)$ . Dabei soll die Stellenzahl ausreichen groß gewählt werden (siehe auch `disp` und `sprintf`).

2. Fertigen Sie für jede Funktion $f_i$ je zwei Graphen, an in denen Sie die drei Verfahren vergleichen. Tragen Sie im ersten den Fehler $x_n - \bar{x}$ und im zweiten das Residuum $|f(x_n)|$ über $n$ an. Hierbei ist $\bar{x}$ die Nullstelle der jeweiligen Funktion. Verwende Sie geeignete Skalen (siehe auch `plot`, `semilogx`, `semilogy` und `loglog`).

**Übungsaufgabe für die Tutorien (01.12-05.12.2014):**

**Aufgabe 1:**
Schreiben Sie einen Algorithmus für ein Trisektionsverfahren. Diskutieren Sie die Konvergenzgeschwindigkeit und Konvergenzordnung im Vergleich zum Bisketionsverfahren.

**Aufgabe 2:**
Verwenden Sie das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen $\bar{x}$ der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ mit $x_0 = 1$,

(b) $f(x) = xe^{-x}$ mit $x_0 > 2$.

**Aufgabe 3:**
Zeigen Sie: Für $f(x) = \cos(x)$ existiert ein Startwert $x_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, so dass das Newton-Verfahren zyklisch ist mit Periode 2.

**Aufgabe 4:**
Zur Berechnung von $\sqrt{a}$, $a > 0$, sei das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = A\,x_n + \frac{B}{x_n} + \frac{C}{x_n^3}$$

gegeben. Bestimmen Sie Koeffizienten $A$, $B$, $C$, so dass das Verfahren für alle $x_0 > \sqrt{a}$ kubisch gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

**Aufgabe 5:**
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle von $f$, sodass das Differenzial $Df(x^*)$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - (Df(x_0))^{-1} f(x_k)$$

für alle Startwerte $x_0$ aus einer Umgebung $U$ von $x^*$ linear gegen die eindeutige Nullstelle $x^*$ konvergiert.

**Aufgabe 6:**
Es soll $\ln(a)$ mit $a > 0$ näherungsweise bestimmt werden. Dies kann mit dem Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = e^x - a$$

geschehen. Man gebe die zugehörige Iterationsvorschrift an und weise quadratische Konvergenz nach. Man berechne für $a = 1$ und $x_0 = 1$ die ersten vier Iterierten. Auf wie viele Nachkommastellen genau stimmen diese mit dem tatsächlichen $\ln(1)$ überein?