Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

7. Übungsblatt: Lineare Ausgleichsprobleme, QR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 17. Dezember 2014)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ mittels Householder Transformationen.

Aufgabe 2: **(7 Punkte)**
Gegeben seien die folgenden Daten

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	2	0

Bestimmen Sie das quadratische Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, welches die Summe des Fehlers

$$\sum_{i=0}^{3} (p(x_i) - y_i)^2$$

minimiert. Lösen Sie dazu die zugehörige Normalengleichung mittels eine Cholesky-Zerlegung der auftretenden Matrix.

Aufgabe 3: **(5 Punkte)**
Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass U als Produkt von Householdermatrizen geschrieben werden kann.
Was bedeutet dies für die Speicherung von orthogonalen Matrizen?

Programmieraufgabe 7: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 18. Dezember 2014)
In dieser Programmieraufgabe soll die QR-Zerlegung mittels Householder-Transformationen programmiert werden. Dabei soll die Matrix Q nicht explizit gespeichert werden, sondern die Householdervektoren/Elementarreflektoren sollen in den frei werdenden Nullen unterhalb von R gespeichert werden. Diese QR-Zerlegung soll dann zum Lösen von linearen Ausgleichsproblemen benutzt werden. Die Vorgehensweise ist detailliert in den Folien aus der Übung erläutert. Bitte laden Sie auch das entsprechende Zip-Archiv von der Webseite des Kurses herunter. Sie können die Datei TEST.m aufrufen um die Funktionstüchtigkeit der einzelnen Funktionen der Reihe nach überprüfen zu lassen. Gehen Sie beim Programmieren am besten in der Reihenfolge vor, wie unten angegeben (entspricht der Reihenfolge auf den Folien):

```
function [beta, v] = house(x)
function Y = h_anwenden(v, beta, X)
function [QR, betas] = qr_zerlegung(A)
function Y = q_anwenden(QR, betas, X, transponiert)
function [x, res] = ausgleichsproblem(A, b)
```

Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Dateien TEST.m, RUNME.m und POLYFIT.m fehlerfrei durchlaufen. RUNME.m und POLYFIT.m müssen außerdem einen Ausgabe ähnlich der in Abbildung 1 produzieren.

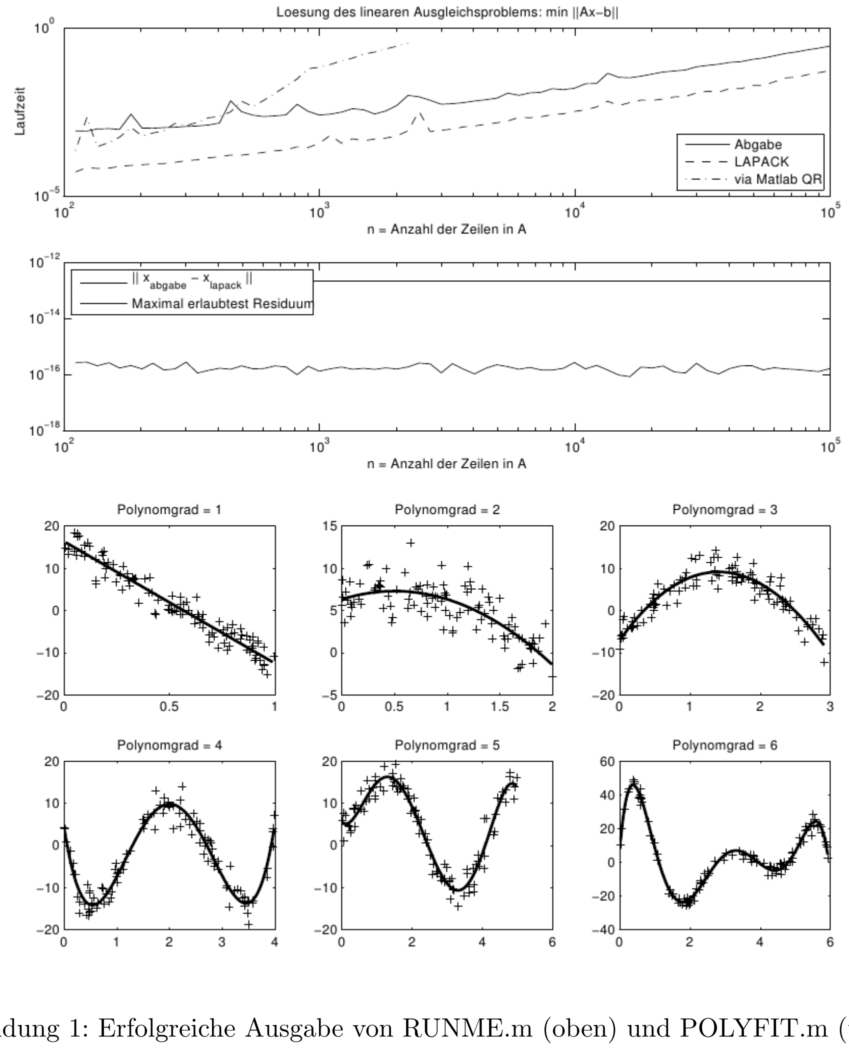

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME.m (oben) und POLYFIT.m (unten).

Übungsaufgabe für die Tutorien (08.12-12.12.2014):

Aufgabe 1:

1. Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 20 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$ mittels Housholder-Transformationen.
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der QR-Zerlegung die Bestapproximation des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 9x_1 - 6x_2 &= 300, \\ 20x_2 &= 900, \\ 12x_1 - 8x_2 &= 600. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Gegeben seien die folgenden Messwerte

x_i	1	2	3	5
y_i	110	103	91	70

Die gegebene Werte sollen durch die Funktion

$$g(x, a, b) = ae^{bx}$$

approximiert werden.

1. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem auf, welches im ersten Schritt des Gauß-Newton Verfahrens gelöst werden soll. Benutzen Sie die Startwerte $a_0 = 10$ und $b_0 = -1$.
2. Benutzen Sie den natürlichen Logarithmus um das Problem in ein ähnliches lineares Ausgleichsproblem umzuschreiben.

Aufgabe 3:
Es seien folgende Messwerte (x_i, y_i, z_i) gegeben:

$$(1, 1, 3), \quad (1, 3, 1), \quad (3, 1, 3), \quad (3, 3, 3).$$

Formulieren Sie ein lineares Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Ausgleichsebene

$$z = a + bx + cy$$

und berechnen Sie dessen Lösung mit Hilfe der Normalengleichung.

Aufgabe 4:
Gegeben seien n linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das klassiche und das numerisch stabilere modifizierte Verfahren von Gram–Schmidt zur Erzeugung von n orthonormalen Vektoren $q_1, \ldots, q_n$, die den selben Raum aufspannen wie $a_1, \ldots, a_n$:

Klassisches Gram-Schmidt

for $k = 1, \ldots, n$ **do**
  $z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i \; (q_i^T a_k)$
  $q_k = z_k / \|z_k\|_2$
end for

Modifiziertes Gram-Schmidt

$a_k^{(1)} = a_k,\ k = 1, \ldots, n$
for $k = 1, \ldots, n$ **do**
  $q_k = a_k^{(k)} / \|a_k^{(k)}\|_2$
  for $l = k+1, \ldots, n$ **do**
    $a_l^{(k+1)} = a_l^{(k)} - (q_k^T a_l^{(k)}) q_k$
  end for
end for

1. Zeigen Sie, dass beide Verfahren die gleichen Vektoren q_k liefern.
2. Zeigen Sie, dass man diese Verfahren als QR–Zerlegung $A = QR$, angewendet auf die Spalten von $A = [a_1, \ldots, a_n]$ interpretieren kann. Dabei ist $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit orthonormalen Spalten und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Geben Sie Q und R explizit an.

Aufgabe 5:
Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2.$$