Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

8. Übungsblatt: Polynominterpolation

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 07. Januar 2015)

Aufgabe 1: **(5 Punkte)**

1. Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	4	-1	-2
f_i	-4	-1	-2	-4	$19/4$	20

   für x_0, x_1, x_2, x_3 mit Hilfe der Lagrange-Darstellung und mit Hilfe der Newton-Darstellung.

2. Berechnen Sie zusätzlich die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms wenn man die Stützstellen x_4 und x_5 mit hinzunimmt.

Aufgabe 2: **(5 Punkte)**
Es seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, d.h. $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi_n \times \Pi_n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) Q(x_i)$$

ein Skalarprodukt auf Π_n definiert. Geben Sie eine Orthogonalbasis an.

Aufgabe 3: **(2 Punkte)**
Berechnen Sie mit Hermite-Interpolation das eindeutige Polynom $p \in \Pi_4$ welches den Bedingungen

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 3, \quad p''(1) = -6, \quad p(3) = -5, \quad p'(3) = 7$$

genügt. Werten Sie das Interpolationspolynom mit dem Horner-Schema am Punkt $x = 4$ aus.

Aufgabe 4: **(5 Punkte)**
Seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Stützstellen und $L_0, \ldots, L_n$ die zugehörigen Lagrange-Polynome, d.h. $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sum\limits_{i=0}^{n} L_i(0) x_i^s = \begin{cases} 1 & s = 0, \\ 0 & s \in \{1, \ldots, n\}, \\ (-1)^n x_0 \cdot \ldots \cdot x_n & s = n+1. \end{cases}$

Programmieraufgabe 8: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 08. Januar 2015)
Bestimmen Sie mit dem Newtonschema die Interpolationspolynome p zu den Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ und $g(x) = \sqrt{|x|}$. Verwenden Sie hierzu als Stützstellen jeweils

i) $x_i = -1 + ih, \ i = 0, \dots, n; \quad h = \dfrac{2}{n}$,

ii) $x_i = \cos \dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \ i = 0, \dots, n$,

für $n = 2, 4, 6, \dots, 20$. Werten Sie das Polynom an den Stellen $y_j^i = x_i + j\frac{x_{i+1}-x_i}{21}, \ j = 1, \dots, 20$ aus. Vergleichen Sie als Schätzung für den maximalen Fehler $\|p - f\|_{\infty \, [-1,1]}$

$$\max_{i \in \{0,\dots,n-1\}, j \in \{1,\dots,20\}} |p(y_j^i) - f(y_j^i)|.$$

Plotten Sie die Interpolationspolynome zu den Stützstellen in i), ii) für $n = 20$. Erläuteren Sie die Ergebnisse.
Bemerkung: Auf der Homepage sind zu dieser Aufgabe bereits mehrere MATLAB-Files bereitgestellt, das Haupt-File (`script.m`) sowie die Funktionen (`FUNKTION?.m`). Zu erarbeiten sind die Files `AUSW.m` und `DIVDIFF.m` welche bereits als Maske zur Verfügung stehen und nur zu ergänzen sind. Die Kommentare in diesen Files geben weitere Informationen über die Vorgehensweise.

Übungsaufgabe für die Tutorien (15.12-19.12.2014):

Aufgabe 1:
Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen

$$a)\quad \begin{array}{c|c|c|c} x_i & -3 & -1 & 2 \\ \hline f_i & 10 & -6 & 15 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{c|c|c|c} x_i & -1 & 0 & 2 \\ \hline f_i & -3 & 4 & 6 \end{array}$$

einmal mit Hilfe der Lagrange-Basis Funktionen und einmal mit der Methode von Newton.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ und für die dividierten Differenzen einer m mal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{h\to 0} f[x, x+h, \ldots, x+mh] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x).$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie das eindeutige Polynom $p \in \Pi_4$ welches die Bedingungen

1. $p(1) = 1$, $p'(1) = 2$, $p''(1) = 4$, $p(3) = 5$.
2. $p(-1) = -3$, $p(0) = 1$, $p'(0) = -5$, $p''(0) = 8$, $p(2) = 15$, $p'(2) = -1$, $p''(2) = 4$.

genügt.

Aufgabe 4:
Sei $p(x)$ ein Polynom dritten Grades, das die Funktion $f(x) = \frac{1}{a^2 - x}$ in den Stützstellen $\{-4, -3, -2, -1\}$ interpoliert. Bestimmen Sie alle Werte von a, so dass

$$|f(x) - p(x)| \le 10^{-5} \qquad \text{für alle } x \in [-4, -1].$$