

## Numerische Mathematik I

### 9. Übungsblatt: Spline-Interpolation, Quadratur

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 14. Januar 2015)

#### Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Bestimmen Sie den interpolierenden quadratischen Spline  $s \in S_{\Delta,2}$  mit den periodischen Randbedingungen  $s'(a) = s'(b)$  zu den folgenden Stützpunkten:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \hline f_i & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

#### Aufgabe 2:

(8 Punkte)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (a) Sei  $F$  Stammfunktion zu  $f$ , d.h.  $F' = f$ . Seien  $x, h \in \mathbb{R}$  mit  $[x - h, x + h] \subseteq [a, b]$ . Zeige:

$$F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) = hf(x) + \frac{h^3}{24} \frac{f''(\theta_+) + f''(\theta_-)}{2}$$

für geeignet zu wählende  $\theta_+, \theta_- \in [a, b]$ .

- (b) Sei  $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\theta_1, \dots, \theta_l \in [a, b]$ . Dann existiert ein  $\theta \in [a, b]$ , so dass

$$f''(\theta) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f''(\theta_i).$$

- (c) Sei  $z_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ . Dann gilt

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(t) dt - hf\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\theta_i)$$

für ein geeignetes  $\theta_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ .

- (d) Sei  $M(h) = h \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}\right)$  (Summierte Mittelpunktsregel). Dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt - M(h) = (b-a) \frac{h^2}{24} f''(\theta),$$

wobei  $\theta \in [a, b]$  geeignet zu wählen ist.

#### Aufgabe 3:

(6 Punkte)

Bestimmen Sie  $a, b, x$  und  $y$ , so dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx ag(x) + bg(y)$$

für alle Polynome dritten Grades exakt ist.

**Programmieraufgabe 9:** (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 15. Januar 2015)

Es soll die kubische Spline-Interpolation mit natürlichen Randbedingungen programmiert werden. Dazu sollen zwei Funktionen

```
function spline = berechne_spline(x, f)
function yy = spline_auswerten(spline, xx)
```

geschrieben werden. Die erste Funktion `berechne_spline` soll für die gegebenen Stützstellen  $(x_k, f_k)$ , welche in den Vektoren `x` und `f` gespeichert sind, den interpolierenden kubische Spline mit natürlichen Randbedingungen ausrechnen. Dabei sollen die Koeffizienten  $a_k, b_k, c_k, d_k$  des Splines und die Stützstellen  $x_k$  als Spaltenvektoren in den Feldern der Struktur `spline` gespeichert werden:

```
spline.a, spline.b, spline.c, spline.d, spline.x
```

Die Funktion `spline_auswerten` soll dann die Ergebnisse aus der Struktur `spline` nutzen, um damit den natürlichen Spline an den Zwischenstellen, welche in dem Vektor `xx` gegeben sind, auszuwerten. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass die Vektoren `x` und `xx` stets aufsteigend sortiert sind.

Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Dateien `RUNME.m` und `SPLINEPLAY.m` fehlerfrei laufen und einen Output ähnlich der Abbildung 1 produzieren.

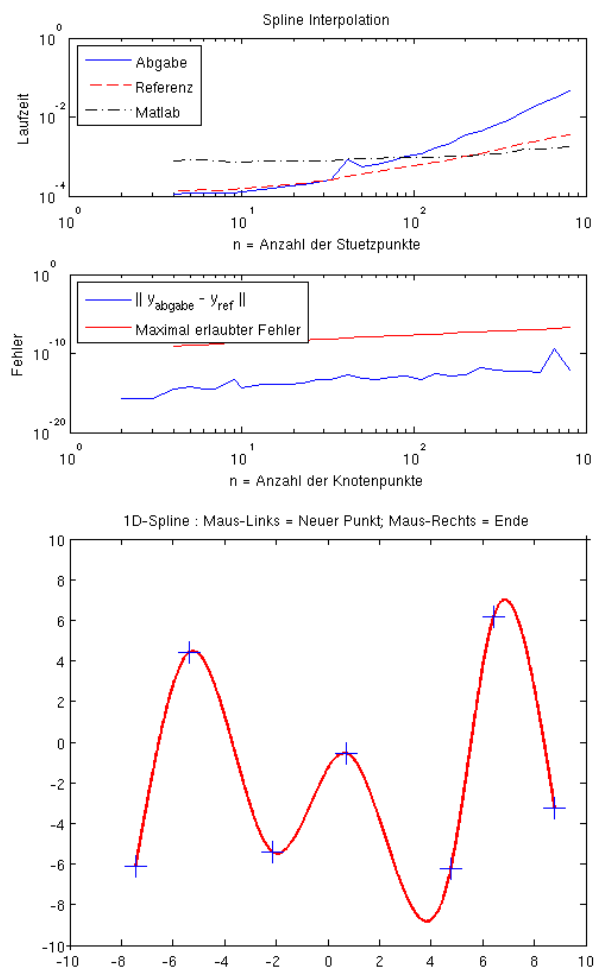


Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von `RUNME.m` (oben) und `SPLINEPLAY.m` (unten).

## Übungsaufgabe für die Tutorien (05.01-09.01.2015):

### Aufgabe 1:

Geben Sie eine Basis der linearen Splines an.

### Aufgabe 2:

Es sei  $\Delta = \{0, 1, 2\}$ . Bestimmen Sie den kubischen interpolierenden Spline  $s \in S_{\Delta,3}$  für die Funktion  $f(x) = x^3$

- (a) mit natürlichen Randbedingungen,
- (b) mit den Randbedingungen  $s''(0) = f''(0)$  und  $s''(2) = f''(2)$ .

### Aufgabe 3:

Sei  $a \leq x_0 < \dots < x_N \leq b$ . Zeigen Sie, dass eine Quadraturformel  $Q_n(f) = (b-a) \sum_{k=0}^N f(x_k) \sigma_k$  höchstens einen Genauigkeitsgrad von  $2N+1$  haben kann.

### Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Parameter  $\alpha, \beta$  und  $x, y$  so, dass die Quadraturformeln

- (a)  $Q_0^1(f) = \alpha f(0) + \beta f'(y)$  auf dem Intervall  $[0, 1]$
- (b)  $Q_{-1}^1(f) = \alpha(f(x) + f(-x)) + \beta f'(y)$  auf dem Intervall  $[-1, 1]$

möglichst hohen Genauigkeitsgrad haben. Bestimmen Sie den maximalen Genauigkeitsgrad.