Technische Universität Berlin
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Wintersemester 2014/2015

Numerische Mathematik I

10. Übungsblatt: Quadratur

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 21. Januar 2015)

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**

(a) Man bestimme die Gauß-Quadratur-Formel mit zwei Stützstellen für das Interval $[-1, 1]$ und die Gewichtsfunktion $\omega(x) := 1 - x^2$.

(b) Man benutze diese Quadratur-Formel um die Funktion $f(x) := e^x$ auf dem Interval $[-1, 1]$ zu integrieren.

Aufgabe 2: **(7 Punkte)**

(a) Entwickeln Sie zur näherungsweisen Berechnung von

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\ dx\ dy$$

eine Quadraturformel, die auf der zweimaligen Anwendung der Simpsonregel beruht.

(b) Geben Sie eine Fehlerabschätzung für die Quadraturformel aus Teil (a) an. Dabei sei f als hinreichend oft stetig differenzierbar voraussgesetzt.

(c) Berechnen Sie mit der Quadraturformel aus Teil (a) das Integral

$$\int_1^3 \int_0^1 (xy - 1)^3\ dx\ dy.$$

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**

Bei der Rombergintegration werden zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

die Trapezsummen $T(h_j)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ zu den Schrittweiten

$$h_j = (b - a)/2^j \qquad j = 0, 1, \ldots$$

(Rombergfolge) auf $h = 0$ extrapoliert. Mit $P_{k,\ldots,k+m}$ wird das interpolierende Polynom zu den Stützstellen $h_k^2, \ldots, h_{k+m}^2$ bezeichnet:

$$P_{k,\ldots,k+m}(h_j^2) = T(h_j), \quad \text{für} \quad k \le j \le k + m$$

und der Wert des Polynoms bei 0 mit $T_{k,\ldots,k+m} = P_{k,\ldots,k+m}(0)$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Schemas von Neville-Aitken eine Rekursionsbeziehung für $T_{k,\ldots,k+m}$.

(b) Zeigen Sie, dass der Wert $T_{0,1}$ der Simpsonregel entspricht.

Programmieraufgabe 10: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 22. Januar 2015)
Schreiben Sie Matlab-Routinen

```
function w = TRAPEZ(f,a,b,N)
function w = MITTELP(f,a,b,N)
function w = SIMPSON(f,a,b,N)
function w = EXTRAPOL(f,a,b,k)
```

zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ mit Hilfe

a) der summierten Trapezregel für $N = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^9$ und folgender Unterteilung:

$$x_i = i \cdot h,\ i = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

b) der summierten Mittelpunktregel für $N = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^9$ und der Unterteilung aus a).

c) der summierten Simpsonregel für $N = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^9$ und der Unterteilung aus a).

d) des Extrapolationsverfahrens zur summierten Trapezregel für $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ mit der Rombergfolge

$$h_l = \frac{b-a}{2^{l+1}},\ l = 0, \ldots, k.$$

Vergleiche die Verfahren bezüglich Genauigkeit und Rechenaufwand zur Berechnung der folgenden Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ dx,\ \int_0^1 \sqrt{x}\ dx,\ \int_0^1 x\sqrt{x}\ dx,\ \int_0^1 x^2\sqrt{x}\ dx$$

Hierzu sind auf der Homepage bereits ein Hauptfile `runme.m`, sowie die Routinen `FUNKTION*.m` zur Berechnung des Integranden der einzelnen Integrale vorhanden. Die Deklaration der Routinen `TRAPEZ.m`, `MITTELP.m`, `SIMPSON.m` und `EXTRAPOL.m` sind als Maske ebenfalls schon definiert und müssen nur noch vervollständigt werden.

Übungsaufgabe für die Tutorien (12.01-16.01.2015):

Aufgabe 1:
Sei $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, eine stetige, nicht-negative Funktion mit endlich vielen Nullstellen. Zeigen Sie, dass $\langle f, g\rangle_w := \int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x$ ein Skalaprodukt auf dem Raum der Polynome definiert.

Aufgabe 2:

(a) Man bestimme die Gauß-Quadratur-Formel mit zwei Stützstellen für das Interval $[-1, 1]$ und die Gewichtsfunktion $\omega(x) := x^2$.

(b) Man benutze diese Quadratur-Formel um die Funktion $f(x) := e^x$ auf dem Interval $[-1, 1]$ zu integrieren.

Aufgabe 3:
Gegeben sei $\Delta : a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Zeigen Sie: es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p(x_k) = \int_a^b p(x)dx$$

für alle $p \in \Pi_n$.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie die Parameter α, β, γ, x so, dass die Quadraturformel

$$Q_{-1}^1(f) = \alpha f'(-x) + \beta f(0) + \gamma f'(x)$$

einen möglichst hohen Genauigkeitsgrad hat. Bestimmen Sie den maximalen Genauigkeitsgrad.