Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

11. Übungsblatt: Anfangswertprobleme

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 28. Januar 2015)

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y'(t) = 2y(t) - e^t, \quad y(0) = 2.$$

(b) Führen Sie die Differentialgleichung

$$Mq''(t) + Dq'(t) + Cq(t) = f(t),$$

$q, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $M, D, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, M regulär, auf eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung zurück.

Aufgabe 2: **(7 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration

$$\begin{aligned}\Phi_0(t) &:= y_0,\\ \Phi_i(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \Phi_{i-1}(s))\mathrm{d}s, \quad i = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

für das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y(t) - e^t = f(t, y(t)), \quad y_0 = y(0) = 2$$

in einem geeignetem Intervall $t \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

Aufgabe 3: **(6 Punkte)**

Die Inkrementfunktion des modifizierten Eulerverfahrens (Verfahren von Collatz) lautet

$$\Phi(t, y, h, f) = f(t + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2} f(t, y)).$$

(a) Interpretieren Sie das Verfahren geometrisch für skalare Differentialgleichungen.

(b) Sei $f \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass das modifizierte Eulerverfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) genüge einer Lipschitzbedingung im zweiten Argument mit Lipschitzkonstante L. Zeigen Sie, dass dann die Inkrementfunktion des modifizierten Eulerverfahrens ebenfalls einer Lipschitzbedingung genügt und bestimmen Sie die dazugehörige Lipschitzkonstante.

Aufgabe 4: **(3 Punkte)**

Bestimmen Sie alle Runge-Kutta Verfahren der Konsistenzordnung $p = 2$ der Form

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
c_2 & c_2 & & \\
c_3 & 0 & c_3 & \\
\hline
 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Programmieraufgabe 11: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 29. Januar 2015)
Schreiben Sie Programme `expeuler`, `modeuler` und `rk4`, die das explizite Eulerverfahren, das modifizierte Eulerverfahren bzw. das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung zur Lösung von vektoriellen Differentialgleichungen

$$y' = f(t, y), \quad f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

im Intervall $[t_0, t_0 + a]$ mit konstanter Schrittweite $h = a/N$ nutzen. Der Aufruf der Programme soll mit

```
[h,t,u]=expeuler(fun,t0,y0,N,a)
[h,t,u]=modeuler(fun,t0,y0,N,a)
[h,t,u]=rk4(fun,t0,y0,N,a)
```

erfolgen, mit den Eingabeparameter

`fun`	Name (String) einer MATLAB-Funktion `dy=fun(t,y)`, die die rechte Seite der Differentialgleichung bestimmt, wobei `y`, `dy` `n`×`1` Matrizen sind.
`t0`	Untere Intervallgrenze t_0.
`y0`	`n`×`1` Matrix des Anfangswerts $y(t_0) = y_0$.
`N`	Positive ganze Zahl für die Anzahl der Schritte N.
`a`	Positive ganze Zahl für die Länge des Integrationsintervals $[t_0, t_0 + a]$.

und Rückgabeparameter

`h`	verwendete konstante Schrittweite $h = a/N$.
`t`	Vektor der äquidistanten Stützstellen $[t_0, \ldots t_N]$ mit $t_N = t_0 + a$.
`u`	`N+1`×`n` Matrix der approximierten Lösung $[u_0; \ldots; u_N]$ an den Stützstellen $[t_0, \ldots t_N]$.

Wenden Sie die drei Verfahren an, um die folgenden Testaufgaben numerisch zu lösen:

(a) $y' = -\tan(t)y, \quad y(0) = 1,\ a = 1.5 \quad$ (exakte Lösung $y(t) = \cos(t)$),

(b) $y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{2t} & 1 \end{bmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{bmatrix} \sin(1) \\ \cos(1) \end{bmatrix},\ a = 2 \quad$ (exakte Lösung $y(t) = \begin{bmatrix} \sin(e^t) \\ \cos(e^t)e^t \end{bmatrix}$),

jeweils für $N = 10, 50, 100, 500$ und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Bemerkung: Auf der Homepage sind zu dieser Aufgabe bereits mehrere MATLAB-Files bereitgestellt. Zu erarbeiten sind die Files `expeuler.m`, `modeuler.m` und `rk4.m`.

Übungsaufgabe für die Tutorien (19.01-23.01.2015):

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung des skalaren Anfangswertproblems

$$x'(t) = \lambda x(t) + b(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und stetigen $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$x(t) = e^{\lambda t} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\lambda \tau} b(\tau) \mathrm{d}\tau \right) = e^{\lambda t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} b(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Aufgabe 2:
Es sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$x'''(t) + \sin(t)x''(t) + \cos(t)x(t) = b(t), \quad x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0,\ x''(0) = a_0$$

wobei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion sei.

(a) Reduzieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung.

(b) Zeigen Sie, dass das entsprechende (reduzierte) Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat.

(c) Führen Sie zwei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens durch. Wie lautet die Näherung an $x(2h)$?

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass die Picard-Iteration des Anfangswertproblems

$$y'(t) = 2y(t), \quad y(0) = 2$$

gegen die Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k)) \right).$$

(b) Geben Sie eine geometrische Interpretation für das Verfahren von Heun an.

Aufgabe 5:
Gegeben sei ein Runge-Kutta Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten α_2, $\beta_{2,1}$, γ_1, γ_2, so dass das Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ hat.