Technische Universität Berlin **Wintersemester 2014/2015**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Jeroen Stolwijk

Numerische Mathematik I

13. Übungsblatt: Mehrschrittverfahren

Hausaufgaben: (Abgabe vor der Vorlesung am 11. Februar 2015)

Aufgabe 1: **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass das Mehrschrittverfahren

$$u_{k+3} + \gamma(u_{k+2} - u_{k+1}) - u_k = h\frac{3+\gamma}{2}\left(f(t_{k+2}, u_{k+2}) + f(t_{k+1}, u_{k+1})\right)$$

die maximale Konsistenzordnung besitzt. Ist das Verfahren für dieses feste γ nullstabil?

Aufgabe 2: **(7 Punkte)**

Bestimmen Sie die Koeffizienten des 2-schrittigen Adams-Moulton-Verfahrens.

Aufgabe 3: **(7 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ bis auf Normierung genau ein lineares m-Schrittverfahren

$$\sum_{j=0}^{m} a_j u_{l+j} = h \sum_{j=0}^{m} b_j f(t_{l+j}, u_{l+j})$$

mit der Konsistenzordnung $p = 2m$ existiert, aber keines mit der Konsistenzordnung $p = 2m + 1$. (*Hinweis:* Schreiben Sie die Konsistenzgleichungen in den Unbekannten a_j und $-b_j$ als lineares homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$, $A \in \mathbb{R}^{(p+1)\times(2m+2)}$. Argumentieren Sie im Fall $p = 2m$ über die Dimension des Systems. Für $p = 2m + 1$ betrachten Sie das System $A^T c = 0$, $c \in \mathbb{R}^{2m+2}$.)

Programmieraufgabe 13: (Abgabe in den Rechnersprechstunden bis zum 12. Februar 2015)
In dieser Programmieraufgabe soll das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren programmiert werden. Laden Sie das Zip-Archiv von der Webseite herunter und implementieren sie eine Funktion

```
function [t, y] = adams_bashforth(N, a, b, func, y0),
```

welche das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren implementiert um ein Anfangswertproblem der Form

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \text{auf } t \in [a, b] \\
y(a) &= y_0
\end{aligned}
$$

auf einem äquidistantem Gitter $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ mit N Gitterpunkten zu lösen. Die Auswertung der rechten Seite erfolgt durch den Funktions-Handle `func`, der auf eine Funktion der Form

```
function f = func(t, y)
```

referenziert. Die Anlaufrechnung (zur Bestimmung der ersten beiden Approximationen `y1`$\approx y(t_1)$ und `y2`$\approx y(t_2)$) soll mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, welches in der Programmieraufgabe 11 implementiert wurde, ausgeführt werden. Die Rückgabewerte der Funktion `adams_bashforth` sind die Vektoren `t`$= [t_0, \dots, t_N]$ und `y`$= [y_0, y_1, \dots, y_N]$ der diskreten Zeitschritte und zugehörigen Approximationen. Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Aufrufe

```
>> RUNME
>> RUNME(true)
```

fehlerfrei druchlaufen und eine Ausgabe wie in Abbildung 1 erzeugen.

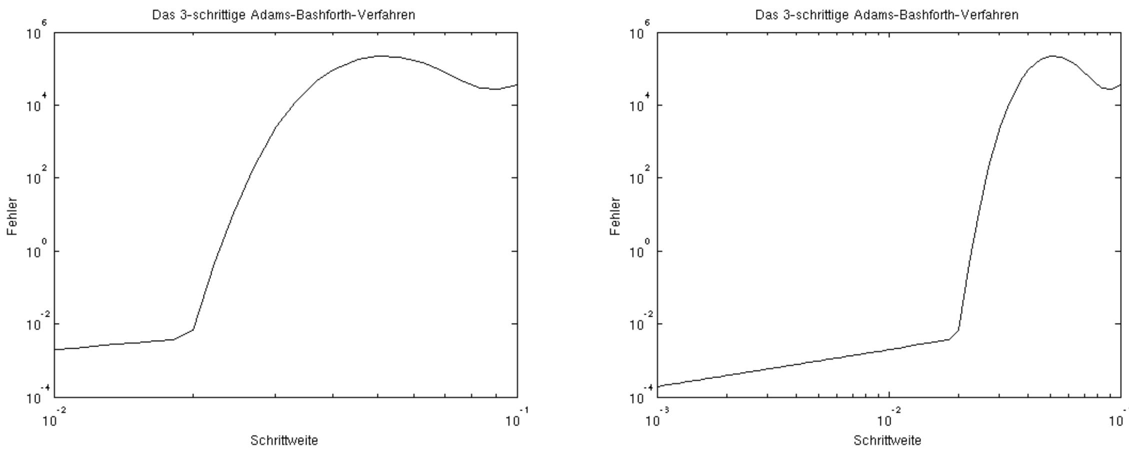

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgaben von `RUNME` (links) und `RUNME(true)`(rechts)

Übungsaufgabe für die Tutorien (02.02.-06.02.2015):

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das folgende Mehrschrittverfahren:

$$u_{k+2} - u_k = \frac{h}{3}\left(f(t_{k+2}, u_{k+2}) + 4f(t_{k+1}, u_{k+1}) + f(t_k, u_k)\right)$$

(a) Bestimmen Sie die maximale Konsistenzordnung des Verfahrens.

(b) Untersuchen Sie das Verfahren auf Nullstabilität.

Aufgabe 2:
Sei $m \geq 2$. Sind die folgenden Mehrschrittverfahren nullstabil?

(a) $u_{k+m} = u_{k+m-1} + h\Phi(f, t_k, u_k, \ldots, u_{k+m}, h)$

(b) $u_{k+m} = 2u_{k+m-1} - u_{k+m-2} + h\Phi(f, t_k, u_k, \ldots, u_{k+m}, h)$

(c) $u_{k+m} = u_{k+m-2} + h\Phi(f, t_k, u_k, \ldots, u_{k+m}, h)$

(d) $u_{k+m} = u_k + h\Phi(f, t_k, u_k, \ldots, u_{k+m}, h)$

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Koeffizienten des 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahrens.