

## Numerische Mathematik I Wiederholungsblatt

### Aufgabe 1:

1. Man unterziehe den Ausdruck

$$\frac{(1-x) - 1}{x} \quad (1)$$

für  $0 \neq x$  einer Fehleranalyse. Wird dieser Ausdruck gut funktionieren auf einer Maschine für betragsmäßig kleine/große  $x \in \mathbb{R}$ ?

2. Man werte den Ausdruck (1) für die Zahl  $-0.018$  aus; auf einer Maschine die mit den normalisierten Gleitpunktzahlen  $F(10, 3, -\infty, \infty)$  rechnet.
3. Geben Sie einen zu (1) mathematisch äquivalenten Ausdruck an, der besser für die Berechnung auf der Maschine geeignet ist und unterziehen Sie auch diesen Ausdruck einer Fehleranalyse.

### Aufgabe 2:

Was ist die absolute und relative Kondition des Verfahrens, welches durch die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a, b) = \frac{b}{a}$  beschrieben ist bezüglich der  $\|\cdot\|_2$ -Norm. Vereinfachen Sie die *relative* Kondition so weit wie möglich.

### Aufgabe 3:

Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -6 & 0 \\ 9 & 18 & -6 & -12 \\ -6 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & 34 \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 4:

Berechnen Sie eine Singulärwert-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### Aufgabe 5:

1. Geben Sie die Iterationsmatrix an, die man erhält wenn man das Einzelschritt-Verfahren auf die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

anwendet.

2. Konvergiert das Einzelschritt-Verfahren für jeden Startwert  $x_0$ ?

**Aufgabe 6:**

Man gebe die Orthogonal-Projektoren auf und entlang des Unterraumes

$$V = \text{span} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

als Matrizen  $P, Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  explizit an.

**Aufgabe 7:**

Die folgenden Daten

$i$	1	2	3	4
$x_i$	1	$\sqrt{\pi}$	$\exp(3)$	-120
$y_i$	2	1	5	2

sollen durch eine konstante Funktion

$$f(x; a) := a$$

möglichst gut (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) beschrieben werden, d.h. es soll gelten  $y_i \approx f(x_i; a)$ . Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem an und lösen Sie es mit Hilfe einer QR-Zerlegung.

**Aufgabe 8:**

Geben Sie das eindeutige Interpolationspolynom  $p \in \Pi_3$  an, welches die Funktion

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

in den Punkten  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$  interpoliert und die zusätzliche Bedingung  $f'(x_0) = p'(x_0)$  erfüllt.

**Aufgabe 9:**

Bestimmen Sie die Parameter  $\alpha, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  derart, dass die Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \alpha f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

möglichst hohen Genauigkeitsgrad hat. Was ist der Genauigkeitsgrad? Handelt es sich bei dem Ergebnis um eine Newton-Cotes-Quadratur Regel? Handelt es sich um eine Gauß-Quadratur Regel?

**Aufgabe 10:**

Geben Sie alle Runge-Kutta Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ b_2 & a_2 & & & & & \\ b_3 & 0 & a_3 & & & & \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 & & & \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & a_5 & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

an, die mindestens die Konsistenzordnung 2 haben.

**Aufgabe 11:**

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \quad (2)$$

mittels der summierten Trapez-Regel mit  $n$  Teilintervallen approximiert. D.h. es soll eine Funktion

`function I = compute_integral(n)`

geschrieben werden, die die Anzahl der Teilintervalle  $n$  übergeben bekommt und die entsprechende Approximation  $I$  an (2) zurückgibt.

**Aufgabe 12:**

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche zwei Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n,m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{k,\ell}$  übergeben bekommt, und damit die Matrix

$$C := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k,m+\ell}$$

zurückgibt.

**Aufgabe 13:**

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche zwei Skalare  $n, m \in \mathbb{N}$  übergeben bekommt, und damit die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m \cdot n - n + 1 & m \cdot n - n + 2 & \dots & m \cdot n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

zurückgibt.