

Numerische Mathematik I

Probeklausur

Aufgabe 1

Punkte

Bestimmen Sie die relative Kondition der Funktion $f :]0, 2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x^y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Verwenden Sie die euklidische Norm für Vektoren und die Frobeniusnorm für Matrizen.

Aufgabe 2

Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{\alpha} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mit dem reellen Parameter α .

- Für welchen Wert von α existiert eine Cholesky-Zerlegung von A ?
- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A für den ermittelten α -Wert.

Aufgabe 3

Punkte

- Sei $f(x) = \cos x - x$. Ermitteln Sie ein Intervall, in dem mit Sicherheit eine Nullstelle von f existiert und bestimmen Sie die Newton-Iterationsvorschrift.
- Durch die Gleichung $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ist eine Ellipse gegeben. Geben Sie eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, deren Nullstellen die Schnittpunkte der Ellipse mit dem Graphen der Funktion $g(x) = x \ln x$ beschreiben. Führen Sie zur Bestimmung der Nullstellen von F einen Newtonschritt zum Startwert $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$ durch.

Aufgabe 4

Punkte

Lösen Sie das Ausgleichsproblem $\min \|Ax - b\|_2$ für

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

indem Sie eine QR-Zerlegung von A bestimmen. Wie groß ist das Residuum?

Aufgabe 5**Punkte**

Bestimmen Sie das Polynom p kleinsten Grades, das die Funktion $f(x) = \frac{1+2x}{1+x^2}$ an den Stellen $-1, 0, 1$ interpoliert. Berechnen Sie außerdem das Interpolationspolynom, wenn man zusätzlich $p'(0) = f'(0)$ fordert.

Aufgabe 6**Punkte**

Interpolieren Sie die Funktion $f(x) = \sin x$, gegeben im Intervall $[0, \pi]$, in den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$, durch einen kubischen Spline $s \in S_{\Delta,3}$ mit den natürlichen Randbedingungen $s''(x_0) = s''(x_2) = 0$.

Aufgabe 7**Punkte**

Bestimmen Sie die maximale Ordnung der Quadraturformel $Q_{-1}^0(f) = \alpha f(-\frac{1}{4}) + \beta f(x)$ für das Integral \int_{-1}^0 mit den Parametern α, β, x und geben Sie die zugehörigen Parameter an.

Aufgabe 8**Punkte**

Gegeben sei das Butcher Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Führen Sie einen Schritt des Verfahrens aus für $y''(t) = (t^2 + 1)y^2(t)$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$, mit der Schrittweite $h = 1$.

Aufgabe 9**Punkte**

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm `housholder.m`, das die Householder-Matrix

$$H = I - 2vv^T$$

liefert, für den Vektor $w \in \mathbb{R}^n$, der die Hyperebene, an der gespiegelt werden soll, definiert.