Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
1. Übungsblatt

(Kompakte, selbstadjungierte Operatoren; abgeschlossene Operatoren)

Abgabe vor der Übung am 28./29. Oktober

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei T ein kompakter Operator mit $\ker T = \{0\}$. Zeige:

(i) $\lambda \in \sigma_p(T) \iff \lambda^{-1} \in \sigma_p(T^{-1})$.[1]

(ii) Der Operator $T^{-1} : \mathcal{H} \supseteq \operatorname{ran} T \to \mathcal{H}$ ist genau dann stetig, wenn $\dim \mathcal{H} < \infty$ gilt.

Aufgabe 2:

Beweise oder widerlege: Es existieren ein unendlichdimensionaler Hilbertraum $\mathcal{H}$ und ein selbstadjungierter, kompakter Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der Eigenschaft $0 \in \rho(A)$ bzw. $0 \in \sigma_p(A), 0 \in \sigma_c(A)$ oder $0 \in \sigma_r(A)$.

Aufgabe 3:

Es seien X ein Banachraum und $T : X \supset \operatorname{dom} T \to X$ ein abgeschlossener, linearer Operator in X. Zeige, dass für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$ die *Resolventenformel*

$$(T-\lambda)^{-1} - (T-\mu)^{-1} = (\lambda-\mu)(T-\lambda)^{-1}(T-\mu)^{-1}$$

gilt.

Aufgabe 4:

Zeige, dass der Operator

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad (Tu)(x) = \int_0^x u(t)dt,$$

beschränkt ist und dass sein Spektralradius echt kleiner als seine Norm ist, $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n} < \|T\|$. Bestimme das Spektrum von T.

Aufgabe 5:

Es seien X ein Banachraum und S, T abgeschlossene Operatoren in X. Beweise oder widerlege:

(i) $S + T$ ist abgeschlossen.

(ii) Ist $S \in \mathcal{L}(X)$, so ist ST abgeschlossen.

(iii) Ist $T \in \mathcal{L}(X)$, so ist ST abgeschlossen.

(iv) Für $\lambda \notin \sigma_p(S)$ ist $(S-\lambda)^{-1}$ abgeschlossen.

(v) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist λS abgeschlossen.

---

[1] Der Operator T^{-1} ist im Allgemeinen nicht auf ganz $\mathcal{H}$ definiert und auch nicht beschränkt, aber immerhin noch abgeschlossen, vgl. Aufgabe 5(iv).