Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

# Funktionalanalysis II
# 10. Übungsblatt

(Fouriertransformation, Schwartzraum)

Abgabe vor der Übung am 20./21. Januar

---

## Hausaufgaben

### Aufgabe 1:

Beweise, dass für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(ii) Zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ und jedem $p \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Zahl $C_{\beta p}(f)$ mit

$$|x|^p |(D^\beta f)(x)| \le C_{\beta p}(f), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

(iii) Zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ und jedem $p \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Zahl $\widetilde{C}_{\beta p}(f)$ mit

$$(1+|x|^2)^{p/2} |(D^\beta f)(x)| \le \widetilde{C}_{\beta p}(f), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

(iv) Zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^m$ und allen $p, q \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Zahl $C_{\beta pq}(f)$ mit

$$(1+|x|^2)^{p/2} |(D^\beta f)(x)| \le C_{\beta pq}(f)(1+|x|^2)^{-q/2}, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

### Aufgabe 2:

Zeige, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}_1$ von $L^1(\mathbb{R}^m)$ nach

$$C_\infty(\mathbb{R}^m) = \left\{ g \in C(\mathbb{R}^m) : \lim_{|x| \to \infty} g(x) = 0 \right\}$$

nicht surjektiv ist.
Tipp: Wie spiegelt sich die Aussage im Verhalten der Inversen von $\mathcal{F}_1$ wider?[1] Zeige eine geeignete Eigenschaft dieser Inversen unter Zuhilfenahme der Funktionen $f_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx} h(x-k)$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $h$ z.B. eine $C^\infty$-Funktion mit Träger in $(-1/2, 1/2)$ sein kann.

### Aufgabe 3:

Bestimme für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $b \in \mathbb{R}$ die Fouriertransformierte folgender Funktionen.

(i) $f_1(x) = f(x-a), \quad x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) $f_2(x) = e^{ia\cdot x} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^m$.

(iii) $f_3(x) = f(bx), \quad x \in \mathbb{R}^m$.

[1] Für das Bilden der Inversen muss $\mathcal{F}_1$ als Abbildung nach $C_\infty(\mathbb{R}^m)$ aufgefasst und $\mathcal{F}_1^{-1}$ mit einem geeigneten Definitionsbereich versehen werden.

**Aufgabe 4:**
Wie in der Übung sei der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ metrisiert und sein Dualraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ erklärt. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ist dann für $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ durch

$$(\mathcal{F}\phi)u = \phi(\mathcal{F}_0 u), \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m),$$

gegeben. Zeige die folgenden Aussagen.

(i) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert als Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

(ii) $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ ist bijektiv.

(iii) Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ gilt $\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}_1 f}$, wobei $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ durch

$$T_f u = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)u(x)dx, \quad u \in S(\mathbb{R}^m),$$

gegeben ist.