Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
11. Übungsblatt

(Fouriertransformation in L^2; Faltung)

Abgabe vor der Übung am 27./28. Januar

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Es seien $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig mit kompaktem Träger, $i = 1, 2, 3$. Bezeichne mit G_i die zugehörigen Multiplikationsoperatoren in $L^2(\mathbb{R})$, also

$$G_i : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto g_i f.$$

Zeige, dass der Operator

$$G_1 \mathcal{F}^{-1} G_2 \mathcal{F} G_3 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

kompakt ist.

Aufgabe 2:

Zeige, dass der Spann der durch

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ definierten Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$ dicht liegt.
Anleitung: Wähle $f \in L^2(\mathbb{R})$, das zu allen f_n orthogonal ist, und zeige, dass die Fouriertransformierte von $x \mapsto \overline{f(x)} e^{-x^2/2}$ null ist.

Aufgabe 3:

Zeige, dass für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^m)$ die Faltung von f und g die Eigenschaften $f * g \in C_\infty(\mathbb{R}^m)$ und

$$\|f * g\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}$$

hat.[1]

Aufgabe 4:

Bestimme das Spektrum der Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.
Tipp: Orthonormalisiert man die Funktionen aus Aufgabe 2, so erhält man eine ONB von $L^2(\mathbb{R})$. Die entstehenden Funktionen liegen im Schwartzraum und hängen eng mit $\mathcal{F}$ zusammen.

---

[1] Für die Definition von $C_\infty(\mathbb{R}^m)$ siehe Vorlesung oder voriges Übungsblatt.