Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
12. Übungsblatt

(Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten; Multiplikationsoperatoren)

Abgabe vor der Übung am 10./11. Februar

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Finde, falls möglich, ein $m \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $p : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, so dass der zugehörige maximale Differentialoperator $T = \overline{T}_0$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$,

$$T_0 f = p(D)f, \quad \operatorname{dom} T_0 = C_0^\infty(\mathbb{R}^m),$$

folgendes Spektrum hat:

(i) $\sigma(T) = [0, \infty)$;

(ii) $\sigma(T) = [-1, 1] \cup [2, \infty)$;

(iii) $\sigma(T) = [-5, \infty)$;

(iv) $\sigma(T) = (0, \infty)$.

Aufgabe 2:

Zeige, dass in Satz 5.17 c) aus der Vorlesung auf den Abschluss nicht verzichtet werden kann.
Wink: Betrachte das durch $p(x, y) = (1 - xy)^2 + y^2$ gegebene Polynom in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3:

Es seien $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^m$ offen und $g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir definieren den Multiplikationsoperator $M_{p,g}$ in $L^p(\Omega)$ durch

$$M_{p,g} f = gf, \quad \operatorname{dom} M_{p,g} = \{f \in L^p(\Omega) : gf \in L^p(\Omega)\}.$$

Zeige die folgenden Aussagen.

(i) Es gilt genau dann $M_{p,g} \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$, wenn g wesentlich beschränkt ist. Dann gilt $\|M_{p,g}\| = \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

(ii) $M_{p,g}$ ist abgeschlossen.

(iii) Für $p \in [1, \infty)$ ist $M_{p,g}$ dicht definiert.

(iv) Ist g nicht wesentlich beschränkt, so ist $\operatorname{dom}(M_{\infty,g})$ nicht dicht in $L^\infty(\Omega)$.

Aufgabe 4:

Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom mit **reellen** Koeffizienten. dann ist laut Vorlesung der von p erzeugte maximale Differentialoperator T in $L^2(\mathbb{R})$ selbstadjungiert. Weiter sei analog S der vom Polynom $q(x) = x$ erzeugte selbstadjungierte Differentialoperator auf $\mathbb{R}$. Gilt $p(S) = T$?[1]

[1] Hier ist $p(S)$ im Sinne des Funktionalkalküls für selbstadjungierte Operatoren zu verstehen.