Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
2. Übungsblatt
(Spektrum, symmetrische und selbstadjungierte Operatoren)

Abgabe vor der Übung am 4./5. November

Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Bestimme Punkt-, stetiges und Restspektrum des Linksshift in ℓ^1,

$$L : \ell^1 \to \ell^1, \quad (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots).$$

Bei welchen $\lambda \in \mathbb{C}$ handelt es sich um Punkte regulären Typs? Wie ändert sich das Spektrum, wenn wir L als Operator in ℓ^2 betrachten?

Aufgabe 2:
Beweise - ohne in der FunkAna I nachzuschlagen![1] - den „Aus 2 folgt 3"-Satz: Seien X und Y Banachräume und $T : X \supseteq \operatorname{dom} T \to Y$ ein linearer Operator. Dann folgt aus je zwei der folgenden Aussagen die dritte.

(i) T ist abgeschlossen.

(ii) T ist beschränkt.

(iii) $\operatorname{dom} T$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 3:
Im Hilbertraum ℓ^2 betrachte den Multiplikationsoperator[2]

$$T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \operatorname{dom} T = a.$$

Ist T stetig? Ist T abgeschlossen? Falls nicht, ist T abschliessbar? Falls ja, bestimme den Abschluss von T. Ist T symmetrisch, wesentlich selbstadjungiert bzw. selbstadjungiert?

Aufgabe 4:
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und R, S dicht definierte, lineare Operatoren in $\mathcal{H}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Falls $R + S$ dicht definiert ist, gilt $R^* + S^* \subseteq (R + S)^*$. Die umgekehrte Inklusion ist aber im Allgemeinen falsch.

(ii) Ist $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so gilt Gleicheit in (i).

(iii) Ist RS dicht definiert, so gilt $S^*R^* \subseteq (RS)^*$. Die umgekehrte Inklusion ist im Allgemeinen nicht wahr.

(iv) Ist $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so gilt die umgekehrte Inklusion in (iii) doch.

---

[1] Eine Richtung ist offensichtlich der Satz vom abgeschlossenen Graphen; der darf natürlich verwendet werden.
[2] Hier ist a wie in der FunkAna I der Raum der abbrechenden Folgen.