Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
3. Übungsblatt

(Unitäre Operatoren; selbstadjungierte Operatoren; Cayley-Transformation)

Abgabe vor der Übung am 11./12. November

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Zeige: Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und U ein unitärer Operator in $\mathcal{H}$, so ist $\sigma_r(U) = \emptyset$.

Aufgabe 2:

Es sei A ein abgeschlossener Operator im Hilbertraum mit $i \notin \sigma_p(A)$. Zeige, dass die Cayley-Transformierte $C(A)$ ein abgeschlossener Operator mit $1 \notin \sigma_p(C(A))$ ist. Was weiß man über $C(A)$, wenn A symmetrisch ist?

Aufgabe 3:

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und S ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$.[1] Zeige die folgenden Kriterien für wesentliche Selbstadjungiertheit:

(i) S ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Räume $\operatorname{ran}(S - \lambda)$ und $\operatorname{ran}(S - \bar{\lambda})$ dicht in $\mathcal{H}$ sind.

(ii) Gilt $\operatorname{ran}(S - \lambda) = \mathcal{H}$ für ein **reelles** λ, so ist $\overline{S} = S^*$.

Aufgabe 4:

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und S ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Weiter sei A eine Erweiterung von S mit $S \subseteq A \subseteq S^*$ und es gelte $\rho(A) \neq \emptyset$. Dann gilt für jedes $\lambda \in \rho(A)$

$$\operatorname{dom} S^* = \operatorname{dom} A \dotplus \ker(S^* - \lambda).$$

Folgere daraus: Ist S symmetrisch und es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\operatorname{ran}(\overline{S} - \lambda) = \mathcal{H}$ und $\operatorname{ran}(\overline{S} - \bar{\lambda}) \neq \mathcal{H}$, so besitzt S keine selbstadjungierte Erweiterung $A \supseteq S$.

Aufgabe 5:

Es sei S ein abgeschlossener, symmetrischer Operator im separablen Hilbertraum. Für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gelte

$$\dim \operatorname{ran}(S - \lambda) = \dim \operatorname{ran}(S - \bar{\lambda}).$$

Zeige, dass ein selbstadjungierter Operator A mit $S \subseteq A \subseteq S^*$ existiert.[2]
Tipp: Cayley-transformiere S. Was hat $C(S)$ mit einer selbstadjungierten Fortsetzung von S zu tun?

---

[1] Die Bezeichnung *symmetrisch* schließt bei uns immer die Dichtheit des Definitionsbereichs ein.
[2] Das ist also die „Umkehrung“ des Zusatzes aus Aufgabe 4.