Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
4. Übungsblatt

(Selbstadjungierte Operatoren; stetiger Funktionalkalkül für unitäre Operatoren)

Abgabe vor der Übung am 18./19. November

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei S ein abgeschlossener, symmetrischer Operator.[1] Zeige, dass äquivalent sind:

(i) $S = S^*$;

(ii) S^* ist symmetrisch;

(iii) Es existiert eine selbstadjungierte Erweiterung $A \supseteq S$ von S und für jede solche gilt $S = A$.

Aufgabe 2:

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und U ein unitärer Operator in $\mathcal{H}$. Weiter sei $f \in C(\sigma(U))$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \sigma(U)$. Zeige: $(1/f)(U)$ ist wohldefiniert und $f(U)$ ist bijektiv mit

$$\frac{1}{f}(U) = (f(U))^{-1}.$$

Zeige außerdem: Gilt $1/(f(z)) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \sigma(U)$, so ist $f(U)$ unitär.

Aufgabe 3:

Es sei U ein unitärer Operator und $f \in C(\sigma(U))$. Weiter sei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $UB = BU$. Dann gilt $f(U)B = Bf(U)$, d.h. Kommutativität „vererbt" sich auf $f(U)$.

Aufgabe 4:

Es sei $S \subseteq S^*$ ein abgeschlossener, symmetrischer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Operator S sei *halbbeschränkt nach unten*, d.h. es existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$(Sx, x) \geq \mu \|x\|^2, \quad x \in \operatorname{dom} S.$$

Zeige, dass $\lambda \geq \mu$ für alle $\lambda \in \sigma_p(S) \cup \sigma_c(S)$ gilt. Wie verhält es sich mit $\sigma_r(S)$? Was bedeutet die Aussage für den Spezialfall $S = S^*$?

---

[1] Damit ist S wie immer auch dicht definiert.