Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
5. Übungsblatt
(Messbarer Funktionalkalkül)

Abgabe vor der Übung am 25./26. November

Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Für einen unitären Operator U im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $x, y \in \mathcal{H}$ definieren wir wie in der Vorlesung

$$l_{x,y}(f) := (f(U)x, y), \quad f \in C(\sigma(U)).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (x, y) \mapsto l_{x,y} \in (C(\sigma(U)))'$$

sesquilinear[1] und stetig ist.

Aufgabe 2:
Zeige, dass der messbare Funktionalkalkül $\widehat{\Phi}$ eines unitären Operators U involutiv ist, dass also für jedes $f \in B(\sigma(U))$ die Beziehung

$$\widehat{\Phi}(\bar{f}) = \widehat{\Phi}(f)^*$$

gilt.

Aufgabe 3:
Für einen unitären Operator U im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei $\widehat{\Phi} : B(\sigma(U)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ der messbare Funktionalkalkül. Wir definieren für jede Borelmenge $\mathcal{B} \subseteq \sigma(U)$ den Operator $E(\mathcal{B})$ durch

$$E(\mathcal{B}) := \widehat{\Phi}(\chi_{\mathcal{B}}).$$

Zeige folgende Aussagen:

(i) $E(\mathcal{B})$ ist eine Orthogonalprojektion und vertauscht mit U, d.h. $E(\mathcal{B})U = UE(\mathcal{B})$.

(ii) Die Restriktion $V := U \upharpoonright \operatorname{ran} E(\mathcal{B})$ ist ein unitärer Operator im Hilbertraum $\operatorname{ran} E(\mathcal{B})$.

(iii) Es gilt $\sigma(V) \subseteq \overline{\mathcal{B}}$.

Folgere nun, dass $E(\mathcal{B}) \neq 0$ für jede in $\sigma(U)$ **offene** Borelmenge $\mathcal{B} \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 4:
Zeige, dass der Operator

$$U : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \quad (Uf)(x) = e^{ix} f(x), \quad x \in (0,1), f \in L^2(0,1),$$

unitär ist und bestimme für $g \in B(\sigma(U))$ den Operator $g(U)$. (Tipp: Nutze die Eindeutigkeit des messbaren Funktionalkalküls!) Überlege dir dann, ob im messbaren Funktionalkalkül der *Spektralabbildungssatz*

$$f(\sigma(U)) = \sigma(f(U)), \quad f \in B(\sigma(U)), \tag{♫}$$

für jeden unitären Operator U gültig bleibt.[2]

---

[1] Zu zeigen ist also, dass diese Abbildung im ersten Eingang linear und im zweiten antilinear ist.

[2] Zur Erinnerung: Die Formel (♫) stimmt mindestens für alle $f \in C(\sigma(U))$, vgl. Vorlesung.