TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
6. Übungsblatt
(Spektralmaße)

Abgabe vor der Übung am 2./3. Dezember

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und E_1, E_2 zwei Orthogonalprojektionen in $\mathcal{H}$.[1] Zeige, dass (i)–(iv) äquivalent sind:

(i) $\operatorname{ran} E_1 \subseteq \operatorname{ran} E_2$.

(ii) $\ker E_2 \subseteq \ker E_1$.

(iii) $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_1$.

(iv) $E_2 - E_1 \geq 0$.[2]

Aufgabe 2:

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, Σ die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{T}$ und $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathcal{A} \mapsto E_{\mathcal{A}}$ ein Spektralmaß. Zeige die folgenden Aussagen für zwei Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Sigma$.

(i) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ disjunkt, so gilt $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} = 0$.

(ii) Es gilt $E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{B}} E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$.

(iii) Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, so gilt $\|E_{\mathcal{A}} x\| \leq \|E_{\mathcal{B}} x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Aufgabe 3:

Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und Σ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{T}$. Weiter sei $E : \Sigma \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(a) Für jede Menge $\mathcal{A} \in \Sigma$ ist $E_{\mathcal{A}}$ eine Orthogonalprojektion.

(b) $E_{\emptyset} = 0$ und $E_{\mathbb{T}} = I$.

(c) Für jede Familie paarweise disjunkter Mengen A_j, $j \in \mathbb{N}$, gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big(E_{A_j} x, y\big) = \big(E_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} x, y\big) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Zeige, dass E ein Spektralmaß auf $\mathbb{T}$ ist.
HINWEIS: Ein zentraler Satz aus der FunkAna I wirkt Wunder.

Aufgabe 4:

Beantworte mit Hilfe des Spektralsatzes für unitäre Operatoren die folgenden Fragen:

(i) Existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H} \neq \{0\}$ und ein unitärer Operator U in $\mathcal{H}$ mit $\sigma(U) = \emptyset$?

(ii) Existiert in jedem Hilbertraum $\mathcal{H} \neq \{0\}$ ein unitärer Operator U mit $\sigma(U) = \mathbb{T}$?

---

[1] P ist Orthogonalprojektion in $\mathcal{H}$, falls $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $P^2 = P = P^*$.
[2] Das wiederum bedeutet $((E_2 - E_1)x, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$.