Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
8. Übungsblatt
(Weihnachtsblatt: Spektralsatz; Satz von Kato-Rellich)

Abgabe vor der Übung am 6./7. Januar

Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Wir bezeichnen mit $\Sigma(\mathbb{R}) \ni \mathcal{A} \mapsto E_{\mathcal{A}}$ das Spektralmaß von A. Die Menge

$$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \lambda \text{ ist Häufungspunkt von } \sigma(A) \text{ oder } \dim\ker(A-\lambda) = \infty\}$$

heißt *wesentliches Spektrum* von A. Zeige: $\lambda \in \mathbb{R}$ liegt genau dann im wesentlichen Spektrum von A, wenn $\dim \operatorname{ran} E_{\mathcal{O}} = \infty$ für jede offene Umgebung $\mathcal{O}$ von λ in $\mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2:
Es seien A und V lineare Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\operatorname{dom} V \supseteq \operatorname{dom} A$. Zeige: Existieren $\alpha, \beta \geq 0$ mit

$$\|Vx\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + \beta\|Ax\|^2 \quad \forall x \in \operatorname{dom} A, \tag{❄}$$

so ist V A-beschränkt. Zeige außerdem, dass die A-Schranke von V durch

$$\inf\left\{\sqrt{\beta} : \beta \geq 0 \text{ und es existiert } \alpha \geq 0, \text{ so dass (❄) erfüllt ist}\right\}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3:
Es sei A in ℓ^2 gegeben durch

$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \operatorname{dom} A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}.$$

Gemäß Aufgabe 3 vom 2. Übungsblatt gilt $A = A^*$. Betrachte weiter den Operator

$$V(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \operatorname{dom} V = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (\sqrt{n}x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\},$$

in ℓ^2. Zeige mit dem Satz von Kato-Rellich, dass $A+V$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe 4:
Beweise oder widerlege:

(i) Ist A selbstadjungiert im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und V symmetrisch und A-beschränkt mit A-Schranke eins, so ist $A+V$ selbstadjungiert.

(ii) Ist A selbstadjungiert im Hilbertraum $\mathcal{H}$, V symmetrisch und gilt $\overline{A+V} = (A+V)^*$, so ist V A-beschränkt.[1]

Wir wünschen Euch fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

[1] Hier ist also nach einer Umkehrung des Satzes von Kato-Rellich gefragt.