Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Wintersemester 2010/11

Funktionalanalysis II
9. Übungsblatt
(Störungstheorie)

Abgabe vor der Übung am 13./14. Januar

Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Es seien X und Y Banachräume und $S : X \supseteq \operatorname{dom} S \to Y$, $T : X \supseteq \operatorname{dom} T \to Y$ lineare Operatoren.

(i) Es gelte $\operatorname{dom} T \subseteq \operatorname{dom} S$, und es seien T abgeschlossen und S abschließbar. Zeige, dass S T-beschänkt ist.

(ii) Es sei S T-beschränkt mit T-Schranke < 1. Zeige, dass $T + S$ genau dann abgeschlossen ist, wenn T abgeschlossen ist.[1]

Aufgabe 2:

Es sei T ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ und es seien p, q reelle Zahlen mit $0 \leq q < p$. Zeige, dass T^q relativ beschränkt bzgl. T^p mit T^p-Schranke null ist.[2]

Aufgabe 3:

Es seien A und B selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Es gelte

$$\dim\left(\operatorname{ran}\left((A-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1}\right)\right) = n < \infty$$

für ein $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Zeige, dass sich A und B nur auf einem n-dimensionalen Unterraum von $\mathcal{H}$ unterscheiden: Es existiert ein Unterraum D von $\mathcal{H}$ mit $A \restriction D = B \restriction D$, so dass $\operatorname{dom} A/D$ und $\operatorname{dom} B/D$ n-dimensional sind.

Aufgabe 4:

Beweise oder widerlege: Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sind $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ beschränkte, überall definierte, selbstadjungierte Operatoren mit $A - B \in \mathfrak{S}_\infty$, so ist $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$. Sollte die Behauptung wahr sein, benutze **nicht** Satz 4.10 der Vorlesung zum Beweis!

---

[1] „Kleine" Störungen erhalten also Abgeschlossenheit.
[2] Hier sind die Potenzen von T „natürlich" über den Funktionalkalkül erklärt.