Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I
8. Tutorium

Aufgabe 1
Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$u'(t) = 3u(t)^{2/3}, \quad t > 0, \quad u(0) = 0$$

lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist. Berechne unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 2

(i) Sei $f : [0,T] \times [u_0 - r, u_0 + r] \to \mathbb{R}$ stetig und für festes t nichtwachsend in u. Dann hat das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0,$$

auf $[0,T]$ höchstens eine Lösung.

(ii) Zeige, daß die Monotonieforderung nur hinreichend, nicht jedoch notwendig ist für die Eindeutigkeit der Lösung.

(iii) Zeige mit Hilfe des Beispiels $f(t,u) = |u|^{1/2}\text{sgn } u,\ u_0 = 0$, daß „nichtwachsend" nicht durch „nichtfallend" ersetzt werden kann.

(iv) Zeige, daß das Anfangswertproblem mit $f(t,u) = -|u|^{1/2}\text{sgn } u,\ u_0 = 0$, eindeutig lösbar ist, obgleich f keiner Lipschitzbedingung genügt.

Aufgabe 3
Sei $f : [0,T] \times [u_0 - r, u_0 + r] \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq h(t)\omega(|u - v|), \quad t \in [0,T],\ u, v \in [u_0 - r, u_0 + r],$$

wobei $h : [0,T] \to [0,\infty)$ integrierbar sei und $\omega : (0, 2r] \to (0,\infty)$ die Osgood-Bedingungen erfülle, d.h. es sei ω stetig auf $(0, 2r]$, $\omega(0) = 0$ und

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^r \frac{dz}{\omega(z)} = \infty.$$

Dann hat das AWP

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ t \in [0,T], \quad u(t_0) = u_0$$

höchstens eine Lösung.

Aufgabe 4
Es sei $R > 0$, $u_0 \in (0,R)$ und $J = [0,\infty)$, $D = \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to D$ sei stetig mit $f(0) \geq 0$, $f(R) \leq 0$ und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Zeige, daß das AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

genau eine auf ganz J definierte Lösung u besitzt, für die $u(t) \in (0,R)$ für $t \geq 0$ gilt.

3 Fragen

1) Wie lautet der Eindeutigkeitssatz von Osgood?

2) Was ist eine maximal fortgesetzte Lösung?

3)

---

1) $(t_0, u_0) \in [0,T] \times X$, $f: [0,T] \times \overline{B}(u_0, r) \to X$ stetig und genüge der Osgood-Bedingung:

$\forall t \in [0,T],\ v, w \in \overline{B}(u_0, r): \ \|f(t,v) - f(t,w)\| \leq \omega(\|v-w\|)$,

mit $\omega: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so, dass

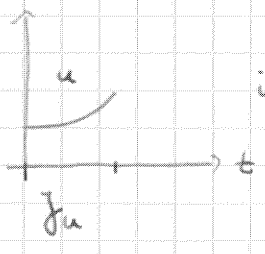
(1) $\omega(0) = 0$ (2) $\omega(z) > 0 \ \forall z > 0$

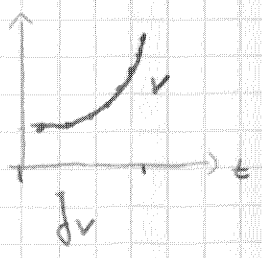
(3) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\omega(z)}\, dz = \infty$ (4) ω monoton wachsend

(5) $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$

$\Rightarrow \forall J \subseteq [0,T]$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in C^1(J; \overline{B}(u_0, r))$

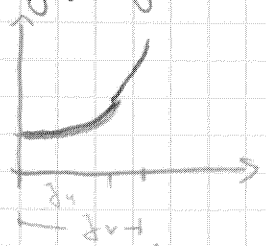
2)

Fortsetzung von 

ist z.B. 

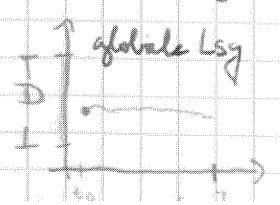
,

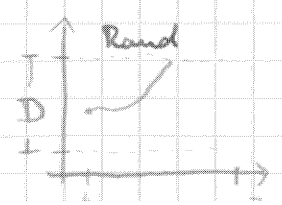
denn $J_u \subseteq J_v$ und $u(t) = v(t)$, $t \in J_u$,

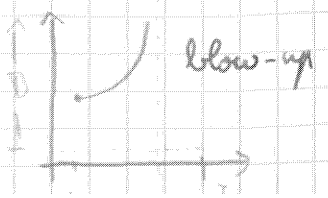
also 

.

Eine maximal fortgesetzte Lösung ist eine Lösung, die nicht weiter fortgesetzt werden kann. Dies kann 3 Gründe haben:







Aufgabe 1

$f(t,u) = 3u^{2/3}$ ist stetig auf $[0,\infty)$

$\overset{\text{Peano}}{\Longrightarrow}$ lokal lösbar

Konstruiere Lösungen via Trennung der Veränderlichen:

$$u'(t) = 3u(t)^{2/3} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{1}{3} u^{-2/3}(s)\, u'(s)\, ds = \int_0^t ds$$

$$\Rightarrow \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{3} v^{-2/3}\, dv = t$$

$$\Rightarrow \quad t = v^{1/3}\Big|_{u_0=0}^{u(t)} = u(t)^{1/3}, \text{ also } u(t) = t^3.$$

Allerdings ist auch $u \equiv 0$ eine Lösung, und ebenso alle Kombinationen

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le c \\ (t-c)^3 & t \ge c \end{cases}$$

Aufgabe 4.2

i) Seien $u, \tilde{u}$ Lösungen des AWP. Definiere $\phi := u - \tilde{u}$.

Angenommen, es gäbe ein $\tilde{t} \in [0,T]$ mit o.B.d.A $\phi(\tilde{t}) > 0$.
Dann gibt es ein erstes solches $\tilde{t}$:
Sei $\phi(t) = 0$ für $0 \le t \le \tilde{t}$ und $\phi(t) > 0$ für $\tilde{t} < t < \tilde{t} + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad u(t) > \tilde{u}(t) \quad , t \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\varepsilon)$

$\Rightarrow \quad f(t, u(t)) \le f(t, \tilde{u}(t)) \quad , t \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\varepsilon)$

$\Rightarrow \quad \phi'(t) = u'(t) - \tilde{u}'(t) = f(t, u(t)) - f(t, \tilde{u}(t)) \le 0 \quad , t \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\varepsilon)$

Wegen $\phi(\tilde{t}) = 0$ folgt dann $\phi(t) < 0$ auf $(\tilde{t}, \tilde{t}+\varepsilon)$.
$\lightning$ zur Wahl von $\tilde{t}$.

ii) $f(t,u) = u$ ist wachsend im zweiten Argument.

$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases}$ hat nach P-L eine eindeutige Lsg
(nämlich $u(t) = e^t$).

iii)

a) f ist nichtfallend in u, denn:
Sei $\tilde{u} > u$. ~~Dann ist~~
Fallunterscheidung: $u > 0 \Rightarrow \sqrt{\tilde{u}} > \sqrt{u}$
$u < 0$ aber $\tilde{u} > 0 \Rightarrow \sqrt{\tilde{u}} + \sqrt{-u} \ge 0$
$\tilde{u} < 0 \Rightarrow -\sqrt{-\tilde{u}} + \sqrt{-u} = \sqrt{-u} - \sqrt{-\tilde{u}} \ge 0$,
da $\tilde{u} > u \Rightarrow -\tilde{u} < -u \Rightarrow \sqrt{-\tilde{u}} < \sqrt{-u}$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} \tilde{u} \, |\tilde{u}|^{1/2} - \operatorname{sgn} u \, |u|^{1/2} \ge 0$

b) f ist stetig, denn:
- klar für $u \ne 0$
- $u = 0$: $\forall t \in [0,T]$: $\lim_{u \searrow 0} f(t,u) = \sqrt{u} = 0 = f(t,0) = \lim_{u \nearrow 0} -\sqrt{-u}$

$\overset{\text{Peano}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ mind. eine Lösung

c) Es gibt mehr als eine Lösung:

- klar: $u \equiv 0$ löst das AWP
- finde zweite Lsg durch Trennung der Veränderlichen

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{\operatorname{sgn} v \cdot |v|^{1/2}} \, dv = t$$

$$\Rightarrow \quad t = \int_0^{u(t)} \operatorname{sgn} v \cdot |v|^{-1/2} \, dv = 2 |v|^{1/2} \Big|_0^{u(t)}$$

$$= 2 \, |u(t)|^{1/2}$$

$\Rightarrow \quad |u(t)| = \frac{1}{4} t^2$, also z.B. $u(t) = \frac{1}{4} t^2$ löst das AWP auf $[0,T]$.

iv) • Stetigkeit und "nichtwachsend" wie oben.

$\Rightarrow$ wegen Peano und i) ist das AWP eindeutig lösbar.

• f genügt keiner Lipschitzbedingung um 0,

da $\forall t > 0$: $\dfrac{|f(t,v) - f(t,0)|}{|v-0|} = \dfrac{|v|^{1/2}}{|v|} = |v|^{-1/2} \longrightarrow \infty$

für $v \to 0$

Aufgabe 3

Seien u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen.

Angenommen $u \not\equiv \tilde{u}$ auf $[t_0, T]$. (analog $[0, t_0]$).

Dann gibt es ein $t_1 \in (t_0, T]$ mit

$u(t) = \tilde{u}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

$u(t) \neq \tilde{u}(t) \quad \forall t \in (t_1, t_1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

O.B.d.A gilt $\tilde{u}(t) < u(t)$ auf $(t_1, t_1+\varepsilon)$.

Definiere $\phi(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$, dann gilt für $t \in (t_1, t_1+\varepsilon)$:

$$\phi'(t) = f(t, u(t)) - f(t, \tilde{u}(t)) \leq h(t)\, \omega(|u(t) - \tilde{u}(t)|)$$
$$= h(t)\, \omega(\phi(t)).$$

Wegen $\phi(t) \neq 0$ und $\omega(z) > 0 \quad \forall z > 0$ folgt für $t \in (t_1, t_1+\varepsilon)$

$$\frac{\phi'(t)}{\omega(\phi(t))} \leq h(t)$$

$$\Rightarrow \int_t^{t_1+\varepsilon} \frac{\phi'(s)}{\omega(\phi(s))}\, ds \leq \int_t^{t_1+\varepsilon} h(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \int_{\phi(t)}^{\phi(t_1+\varepsilon)} \frac{1}{\omega(z)}\, dz \leq \int_t^{t_1+\varepsilon} h(s)\, ds$$

Für $t \searrow t_1$ gilt $\phi(t) \to 0$, somit geht die linke Seite gegen ∞, die rechte bleibt beschränkt. ↯

Aufgabe 4

Da D unbeschränkt ist, reicht es wegen der Sätzen zur maximal fortsetzbaren Lösung aus zu zeigen, dass die Lösung in J kein blow-up haben kann.

Angenommen, es gelte $\lim_{t \nearrow \beta} u(t) = \infty$ für ein $\beta \in J$.

Dann gibt es ein kleinstes $\tilde{t}$ mit $u(\tilde{t}) = R$, $u(t) < R$ für $t < \tilde{t}$ und $u(t) > R$ für $t > \tilde{t}$ (in einer Umgebung von $\tilde{t}$).

$\Rightarrow \quad u'(\tilde{t}) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(u(\tilde{t})) = u'(\tilde{t}) > 0.$

Dies ist ein Widerspruch zu $f(u(\tilde{t})) = f(R) \leq 0$. $\lightning$

Analog zeigt man, dass $u(t)$ nach unten beschränkt ist.

$\Rightarrow$ Es gibt keinen blow-up in J

$\Rightarrow$ Das maximale Existenzintervall ist J!