

# Tutoriumsaufgaben zur Differentialgleichungen I

## 9. Tutorium

### Aufgabe 1

Sei  $J = [-1, 1]$ ,  $D = (-2, 2)$  und

$$\begin{cases} u'(t) = \operatorname{sgn}(t)u(t), & t \in (-1, 1), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Ist das AWP lösbar im Sinne von Caratheodory? Was ist mit Eindeutigkeit?

### Aufgabe 2

Sei  $F : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  der durch

$$f(t, u) := \sin(u)$$

definierte Nemytskij-Operator.

Wie sind die Räume  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  definiert?

Zeige, dass  $F$  wohldefiniert und beschränkt, aber unstetig im Punkt  $v \equiv 0 \in L^1$  ist.

### Aufgabe 3

Wir wissen, dass jede lipschitzstetige Funktion absolut stetig und jede absolut stetige Funktion stetig ist. Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht. Dies zu zeigen ist Sinn dieser Aufgabe.

- (i) Zeige, dass  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 \neq t \mapsto g(t) := t \cos \frac{\pi}{2t}$ ,  $g(0) = 0$ , zwar stetig, nicht jedoch absolut stetig ist.
- (ii) Finde eine Funktion, die absolut stetig, nicht jedoch lipschitzstetig ist.

### 3 Fragen

- 1) Wie lautet die Carathéodory-Bedingung?
- 2) Was besagt die Majorantenbedingung?
- 3) Wie lautet der Satz zur lokalen Lösbarkeit im Sinne von Carathéodory?

- 
- 1)  $f: [0, T] \times M \rightarrow \mathbb{R}^d$  genügt auf  $[0, T] \times M$  eine  $L$ -Bed., falls gilt
    - i)  $t \mapsto f_i(t, v)$   $\forall v \in M$  auf  $[0, T]$   $L$ -messbar  $\forall i = 1..d$
    - ii)  $v \mapsto f_i(t, v)$  für fast alle  $t \in [0, T]$  stetig auf  $M$   $\forall i = 1..d$

- 2)  $f$  genügt einer  $M$ -Bed., falls gilt:

$$\exists m \in L^1(0, T) : |f_i(t, v)| \leq m(t) \quad \forall i, (t, v) \in [0, T] \times M$$

- 3) 1) + 2)  $\Rightarrow u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds$  hat mind. eine Lsg  $u: I_a \rightarrow \overline{B}(u_0, r)$  abschlig.  
(also, dann  $\max_{t \in I_a} \left| \int_0^t m(s) ds \right| \leq r$ )

### Aufgabe 1

$$f(t, v) = \operatorname{sgn}(t)v$$

- $f(t, \cdot)$  ist stetig  $\forall t \in \mathbb{R}$
  - $f(\cdot, v)$  ist messbar  $\forall v \in D$
  - $|f(t, v)| \leq 2 \quad \forall (t, v) \in D,$
- $\} \text{Carathéodory-Bed}$   
 $\} \text{Majorantenbedingung}$   
 $g \equiv 2 \in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists$  mind eine lokale Lösung.

• vereinf. L-Bed:  $|f(t, v) - f(t, w)| = |v - w|$  ist erfüllt

$\Rightarrow$  Lösung ist eindeutig

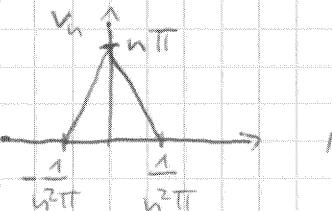
### Aufgabe 2

Offenbar gilt  $\|Fv\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\sin(v(t))| \leq 1 \quad \forall v \in L^1$ .

Somit gilt  $F: L^1 \rightarrow L^\infty$  und  $F$  beschränkt.

Für  $v \equiv 0$  ist  $Fv \equiv 0$ .

Betrachte  $(v_n) \subset L^1$  mit



dann gilt  $\|v - v_n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |v_n(t)| dt = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,

also konvergiert  $v_n$  gegen  $v \equiv 0$  in  $L^1(\mathbb{R})$ .

Aber:  $\|Fv - Fv_n\|_\infty = \|Fv_n\|_\infty$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} |\sin(v_n(t))| = 1,$$

da  $v_n$  an mindestens einer Stelle gleich  $\pi/2$  ist.

$\Rightarrow Fv_n$  konvergiert nicht gegen  $Fv$ .

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar: } \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty$$

$L^\infty$  ist der Raum aller messbaren Funktionen, die vereinfacht (also bis auf eine Nullmenge) beschränkt sind, d.h.  $\exists K > 0: |f(t)| \leq K$  für

### Aufgabe 3

i) Wegen  $|t \cos(\frac{\pi}{2t})| \leq |t|$  ist  $f$  stetig.

Wir zeigen, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt, sodass für jedes  $\delta > 0$  eine Kollktion  $(a_i, b_i)$   $_{i=1}^{n-1}$  paarweise disjunkter Teilintervalle gilt mit  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$  und  $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| > \varepsilon$ .

Wir nehmen  $\varepsilon = 1$ .

Da die Reihe  $\sum_k \frac{1}{2k}$  divergiert, divergiert auch die Reihe  $\sum_{\substack{k \\ 2k < \delta}} \frac{1}{2k}$ .

Somit gibt es ein  $N > 0$  mit  $\sum_{\substack{k \\ 2k < \delta, k \in N}} \frac{1}{2k} > 1$ .

Wir nehmen  $(a_k, b_k) = (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$ ,  $\frac{1}{2k} < \delta$ ,  $k \in N$ ,

dann folgt einerseits  $\sum_{\substack{k \\ 2k < \delta, k \in N}} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) < \delta$

(Stichwort: Teleskopsumme) und andererseits

$$\sum_{\substack{k \\ 2k < \delta, k \in N}} |f\left(\frac{1}{2k}\right) - f\left(\frac{1}{2k+1}\right)| = \sum_{\substack{k \\ 2k < \delta, k \in N}} \left| \frac{1}{2k} \cos(k\pi) - 0 \right| = \sum_{\substack{k \\ 2k < \delta, k \in N}} \frac{1}{2k} > 1.$$

ii)

Viele z.B.  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \sqrt[3]{t}$ .

Dann ist  $f$  nicht lipschitzstetig.

Es gilt aber  $f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \in L^1(0, 1)$

$\Rightarrow f(t) = \int_0^t \frac{1}{3\sqrt[3]{s^2}} ds$  ist absolut stetig.