A5

a) $\ell \in (C[a,b])'$, ℓ' Fortsetzung auf $B[a,b]$, $g_\ell(x) = \begin{cases} 0 & , x = a \\ \ell'(\chi_{[a,x]}) & , x > a \end{cases}$

Z.z.: $g_\ell \in BV[a,b]$

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $\theta_k = \operatorname{sgn}(g(x_k) - g(x_{k-1}))$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} |g_\ell(x_k) - g_\ell(x_{k-1})| = \left|\sum_{k=1}^{n} \theta_k (g_\ell(x_k) - g_\ell(x_{k-1}))\right| = \Big|\ell'\Big(\underbrace{\theta_1 \chi_{[a,x_1]} + \sum_{k=2}^{n} \theta_k \chi_{(x_{k-1},x_k]}}_{\|\cdot\|_\infty \le 1}\Big)\Big| \le \|\ell\|$$

$(*) \Rightarrow \bigvee_a^b (g_\ell) \le \|\ell\|$. $\square$

Z.z.: $\ell(f) = \int_a^b f(x)\, dg_\ell(x)$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so klein, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x - y| \le \delta$. Sei $Z = x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ ein Zerlegung mit Feinheit $< \delta$ sodass

$$\left|\int_a^b f(x)\, dg_\ell(x) - \sum f(x_k)(g_\ell(x_k) - g_\ell(x_{k-1}))\right| < \varepsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \left|\ell(f) - \int_a^b f(x)\, dg_\ell(x)\right| &\le \left|\ell(f) - \sum f(x_k)(g_\ell(x_k) - g_\ell(x_{k-1}))\right| + \varepsilon \\ &\le \|\ell\| \left\|f - \Big(f(x_1)\chi_{[a,x_1]} + \sum_{k=2}^{n} f(x_k)\chi_{(x_{k-1},x_k]}\Big)\right\|_\infty + \varepsilon \\ &\le \|\ell\|\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

b) $T: BV_0[a,b] \to (C[a,b])'$, $(Tg)(f) = \int_a^b f(x)\, dg(x)$

Z.z.: T ist isometrischer Isomorphismus

Beweis: Injektivität folgt aus 4c) und 3e). Offenbar gilt

$$\|Tg\| \le \bigvee_a^b (g) = \|g\|.$$

Sei $\ell \in (C[a,b])'$, dann gibt es nach a) ein $g_\ell \in BV[a,b]$ mit $\ell(f) = \int_a^b f(x)\, dg_\ell(x)$. Das Integral ändert den Wert nicht, wenn man g_ℓ durch $\tilde g_\ell \in BV_0$ ersetzt, da man eine Folge von Zerlegungen mit gemeinsamen Stetigkeitspunkten in den Integralsummen betrachten kann (nach 2d) ist die Menge der gemeinsamen Stetigkeitspunkte dicht). Dies zeigt die Surjektivität.

Es gilt $\bigvee_a^b (\tilde g_\ell) \le \bigvee_a^b (g_\ell - g_\ell(a)) = \bigvee_a^b (g_\ell) \overset{(*)}{\le} \|\ell\|$ (nach 3e))

$\Rightarrow \|\tilde g_\ell\| \le \|\ell\| = \|T\tilde g_\ell\| \le \|\tilde g_\ell\|$, also Gleichheit. $\square$

c) $$g_\mu(x) = \begin{cases} 0 & , x = a \\ \mu([a,x]) & , x \in (a,b] \end{cases}$$

<u>Z.z:</u> $g_\mu \in BV_0$, $\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_a^b f(x) \, dg_\mu(x)$

Da μ regulär ist, gibt es zu $x \in (a,b)$ und $\varepsilon > 0$ eine offene Menge M mit $[a,x] \subset M$ und $\mu(M \setminus [a,x]) < \varepsilon$. Für alle y mit $[a,x] \subseteq [a,y) \subseteq M$ gilt daher

$$|g_\mu(y) - g_\mu(x)| = \mu((x,y]) < \varepsilon,$$

d.h. g_μ ist rechtsstetig.
Der Beweis, dass die Integrale übereinstimmen ist wie in a)

<u>Z.z.:</u> $\mu \mapsto g_\mu$ ist isometrischer Isomorphismus von $RCA[a,b] \to BV_0[a,b]$

<u>Beweis:</u> Sei $g \in BV_0[a,b]$ und H die Menge der Stetigkeitspunkte von g.
Für $a, b \in H$ definiere

$$\mu(\{a,b\}) = g(b) - g(a) \quad (a > 0), \quad \mu(\{0,b\}) = g(b), \ \mu(\{a\}) = g(a+0).$$

Sei Σ die Algebra der endlichen Vereinigungen von Intervallen mit Randpunkten in H. Dann ist μ eine additive, regulär<u>e</u> Mengenfunktion auf Σ.
↑Stetigkeit!

Nach Satz 8.1.17 gibt es eine eindeutige Fortsetzung $\mu \in RCA$ (da Σ die Borel-σ-Algebra erzeugt, da H dicht liegt). Dann ist $g_\mu \in BV_0$ und stimmt in allen Stetigkeitspunkten mit g überein, also $g_\mu = g$.
Dies zeigt die Surjektivität. Offenbar gilt $\|g_\mu\| = \bigvee_a^b (g_\mu) \le |\mu|([a,b])$.
Seien $(A_i)_{i=1}^n \subseteq \Sigma$ paarweise disjunkt und $\varepsilon > 0$. Da μ regulär ist, gibt es Intervalle (a_i, b_i) mit Endpunkten in H, so dass $|\mu((a_i,b_i)) - \mu(A_i)| < \frac{\varepsilon}{n}$.
Sei $x_0 < x_1 < \ldots < x_m$ die Folge aller Schnittpunkte der Intervalle (a_i, b_i). Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| \le \sum_{i=1}^k |\mu((a_i,b_i))| + \varepsilon = \sum_{k=1}^m |g(x_k) - g(x_{k-1})| + \varepsilon$$
$$\le \bigvee_a^b (g) + \varepsilon$$

Insgesamt folgt $\|\mu\| = |\mu|([a,b]) = \bigvee_a^b (g) = \|g\|$, also insbesondere Injektivität. ☐

d) Sei $\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & A = \{x_0\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, $g_{x_0} = \chi_{[x_0,b]}$ ($x_0 > a$, sonst $g_a = \chi_{(a,b]}$)

$$\delta_{x_0}(f) = \int_a^b f \, d\mu_{x_0} = \int_a^b f(x) \, dg_{x_0}(x).$$