**Blatt 7, Aufgabe 2(b)**
Ist $T$ normal, invertierbar und positiv, so kann man $S = \ln T$ definieren. Es kam nun die Frage auf, warum $e^S = T$ gilt.

Studiert man den Beweis für den stetigen Funktionalkalkül, so sieht man, dass $\Phi$ ein isometrischer involutiver Isomorphismus zwischen $C(\sigma(T))$ und $C^*(T)$ ist. Beide sind nämlich nach dem Satz von Gelfand isometrisch isomorph zu $C(\Gamma_{C^*(T)})$. Sei $\widehat{T}$ die Gelfandtransformierte von $T$. Ist $f \in C(\sigma(T))$, so ist $f(T) = \Phi(f)$ der eindeutige normale Operator in $C^*(T)$, dessen Gelfandtransformierte die Funktion $f \circ \widehat{T}$ ist.

Sei nun $g \in C(f(\sigma(T)))$, dann ist $g \circ f \in C(\sigma(T))$. Es gilt $C^*(f(T)) \subseteq C^*(T)$. Daher ist $g(f(T)) \in C^*(T)$. Die Gelfandtransformierte von $g(f(T))$ (bzgl. $\Gamma_{C^*(T)}$) ist

$$g \circ \widehat{f(T)} = g \circ (f \circ \widehat{T}) = (g \circ f) \circ \widehat{T}$$

(hierbei ist also $\widehat{f(T)}$ die Einschränkung auf $\Gamma_{C^*(T)} \subseteq \Gamma_{C^*(f(T))}$). Nach dem oben gesagten gilt also tatsächlich

$$g(f(T)) = (g \circ f)(T).$$

Man beachte nochmal, dass $g$ auf $f(\sigma(T))$ stetig sein muss.