Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 21.10.2011

1. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Spektrum von Operatoren)

Aufgabe 1
Es seien X und Y Banachräume. Beweisen Sie, dass die Menge der bijektiven stetigen linearen Operatoren in $L(X,Y)$ offen ist.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie das Punktspektrum $\sigma_p(T)$, das kontinuierliche Spektrum $\sigma_c(T)$ und das Restspektrum $\sigma_r(T)$ des Operators

$$T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R}),\ (Tx)(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} < \|T\|.$$

Aufgabe 3
Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie σ_p, σ_c und σ_r für den Operator

$$T_s\colon B(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to B(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ (Tx)(t) = x(t+s).$$

Hierbei ist $B(\mathbb{R},\mathbb{C})$ der mit der Supremumsnorm versehene (komplexe) Banachraum der beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4
Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit $\|T\| \in \sigma(T)$. Zeigen Sie:

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|.$$

Aufgabe 5
Seien X ein komplexer Banachraum und $T \in L(X)$. Eine wichtige Methode zur Lösung der linearen Gleichung

$$x - Tx = y$$

ist die *sukzessive Approximation*. Es handelt sich dabei um die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = y + Tx_n.$$

Zeigen Sie:

(a) Liegt das Spektrum von T im Kreis $|\lambda| < 1$, so besitzt das Problem für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung x_* und die Folge (x_n) konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ gegen x_*.

(b) Gibt es einen Punkt λ im Spektrum mit $|\lambda| > 1$, so existiert ein $y \in X$ und ein Startwert $x_0 \in X$, für welchen die Folge (x_n) divergiert.

Hinweis: Wähle $x_0 = 0$.