Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 28.10.2011

2. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Kompakte und selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum)

Aufgabe 1
Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Es existieren ein unendlichdimensionaler Banachraum X und ein kompakter Operator $T \in L(X)$, sodass

(a) $0 \in \sigma_p(T)$,

(b) $0 \in \sigma_c(T)$,

(c) $0 \in \sigma_r(T)$.

Ändert sich etwas, wenn X ein Hilbertraum und T auch selbstadjungiert sein sollen?

Aufgabe 2
Sei X ein komplexer Banachraum und λ ein Eigenwert von $T \in L(X)$. Die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(\lambda I - T)^n$ heißt *algebraischer Eigenraum* und seine Dimension *algebraische Vielfachheit* von λ. Die Anzahl der voneinander verschiedenen Mengen $\mathcal{N}(\lambda I - T)^n$ heißt *Rang* von λ.

Beweisen Sie: Ist X ein Hilbertraum und T selbstadjungiert, so ist der Rang jedes Eigenwertes von T gleich 1. Dementsprechend stimmt die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen (der Dimension des Eigenraums) überein.

Aufgabe 3
Sei X ein separabler Hilbertraum und (e_n) eine Orthonormalbasis von X. Der lineare Operator $T\colon X \to X$ sei definiert durch

$$Te_n = \frac{1}{n}(e_1 + e_n).$$

Überzeugen Sie sich, dass $Y = \mathcal{R}(T)$ ein invarianter Unterraum von T ist. Zeigen Sie dann:

(a) Der Operator T ist beschränkt und kompakt.

(b) Der Prähilbertraum Y ist nicht vollständig. (Dies folgt auch aus (c). Geben Sie hier ein $z \in X \cap \overline{Y} \setminus Y$ explizit an.)

(c) Die Einschränkung $S\colon Y \to Y$ von T auf Y ist kompakt, aber es existiert kein „adjungierter" Operator $S^*\colon Y \to Y$ mit

$$(Sx, y) = (x, S^*y) \quad \text{für alle } x, y \in Y.$$

Aufgabe 4
Es seien $T \in L(X)$ ein normaler, kompakter Operator auf einem komplexen Hilbertraum X und p ein Polynom ohne konstantes Glied. Es sei $S = p(T)$. Zeigen Sie, dass $\sigma(S) = p(\sigma(T))$ und der zu $\mu \in \sigma(S)$ gehörige Eigenraum $E_\mu(S)$ die direkte Summe der Eigenräume $E_{\lambda_k}(T)$ ist, für welche $p(\lambda_k) = \mu$ ist. (Ist 0 kein Eigenwert, so sei $E_0 = \{0\}$).

Aufgabe 5
Seien $X = \ell_2(\mathbb{C})$ und

$$T\colon X \to X\colon x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2/2, x_3/3, \dots).$$

Bekanntlich ist T kompakt. Man beweise, dass kein $S \in L(X)$ existiert mit $S^2 = T$.