Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 04.11.2011

3. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Nukleare und Hilbert-Schmidt-Operatoren)

Aufgabe 1
Beweisen Sie als Ergänzung zur Vorlesung folgenden allgemeineren Satz zur Existenz von Quadratwurzeln. Ist X ein Hilbertraum und $T \in L(X)$ positiv, und, falls X reell ist, selbstadjungiert[1], so existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator $S \in L(X)$ mit $S^2 = T$. (Notation: $S = T^{1/2}$.) Ist X reell und T selbstadjungiert, so ist auch $T^{1/2}$ selbstadjungiert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Taylorreihe von $(1-z)^{1/2}$ im Kreis $|z| \leq 1$ absolut konvergiert.

Aufgabe 2
Sei $X = L^2([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Bestimmen Sie den adjungierten Operator T^* sowie die singulären Zahlen von

$$T\colon X \to X,\ (Tx)(t) = \int_{[0,t]} x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Entscheiden Sie, ob T ein Hilbert-Schmidt-Operator oder sogar nuklear ist.

Hinweis: Finden Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von T^*T im Unterraum $C([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Prüfen Sie dann, ob es weitere geben kann.

Aufgabe 3
Sei X ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum. Zeigen Sie, dass die Räume $N(X)$ und $HS(X)$ der nuklearen und der Hilbert-Schmidt-Operatoren in $L(X)$ bezüglich der Operatornorm nicht abgeschlossen sind.

Aufgabe 4
Sei X ein separabler Hilbertraum und (e_n) irgendeine Orthonormalbasis.

(a) Beweisen Sie: Ist $T \in L(X)$ positiv und, falls X reell ist, selbstadjungiert[1], so folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle$, dass T nuklear ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass man in (a) auf die Positivität von T im Allgemeinen nicht verzichten kann.

Aufgabe 5
Sei wieder X ein separabler Hilbertraum. In dieser Aufgabe betrachten wir $HS(X)$ als Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^*A)$. Unter dem Rang von $A \in HS(X)$ versteht man das kleinste $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, für welches A in der Form $A = \sum_{n=1}^{r} x'_n \otimes y_n$ geschrieben werden kann. Wir setzen

$$\mathcal{S}_r = \{A \in HS(X) \mid \operatorname{rang} A \leq r\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}_1$ in $HS(X)$ schwach folgenabgeschlossen ist und das Problem der besten Rang-1-Approximation,

$$\|A - B\|_{HS} = \min, \quad B \in \mathcal{S}_1,$$

für jedes $A \in HS(X)$ eine Lösung besitzt.

Hinweis: Eine konvexe Funktion f auf einem normierten Raum ist schwach unterhalb folgenstetig, d.h. $x_n \rightharpoonup x$ impliziert $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ (Blatt 9, Aufgabe 3 vom letzten Semester).

(b) Allgemein kann man die Lösung(en) des Problems

$$\|A - B\|_{HS} = \min, \quad B \in \mathcal{S}_r,$$

aus der kanonischen Darstellung von A ablesen (ähnlich wie im Matrixfall). Wir betrachten ein nur lokales Minimum $B^* \in \mathcal{S}_r$ des Problems (lokal in $\mathcal{S}_r$). Zeigen Sie: ist $\operatorname{rang} A \geq r$, so ist $\operatorname{rang} B^* = r$.

[1] Es sei daran erinnert, dass auf einem komplexen Hilbertraum jeder positive Operator selbstadjungiert ist.