TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 18.11.2011

5. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Banachalgebren und Spektrum)

Aufgabe 1
Sei $X = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq 1\}$. Sei $A \subseteq C(X, \mathbb{C})$ die Teilmenge der im Inneren von X analytischen Funktionen. Zeigen Sie: mit der Supremumsnorm sowie dem Produkt

$$(x * y)(\zeta) = \zeta \int_0^1 x(\zeta - t\zeta) y(t\zeta) \, \mathrm{d}t$$

wird A zu einer Banachalgebra ohne Einselement.

Aufgabe 2
Betrachten Sie die C^*-Algebra $A = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (versehen mit der Supremumsnorm, der punktweisen Multiplikation und Konjugation). Diese besitzt kein Einselement. Sei $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ die Erweiterung zu einer C^*-Algebra mit Einselement $(0, 1)$ und Norm $\|L_{(f,\lambda)}\|$ (siehe Satz 7.1.7).

(a) Sei $(B(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ die C^*-Algebra der beschränkten Funktionen. Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $(f, \lambda) \mapsto f + \lambda$ von $\tilde{A}$ in $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine Isometrie ist. Auf diese Weise kann $\tilde{A}$ mit der Unteralgebra A' von $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der stetigen, im Unendlichen gegen eine Konstante strebenden Funktionen identifiziert werden.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $G(A') \cong G(\tilde{A})$.

(c) Geben Sie das Spektrum eines Elements $f \in A$ an.

Aufgabe 3

(a) Sei A eine Banachalgebra. Für alle $a, b \in A$ zeige man

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}.$$

Sind etwa A, B Operatoren und A oder B kompakt, so haben AB und BA dieselben Nichtnulleigenwerte.

(b) Sei A eine Banachalgebra mit Eins und B eine abgeschlossene Unteralgebra mit $\mathbf{1} \in B$. Zeigen Sie: für alle $b \in B$ gilt

$$\sigma_B(b) \supseteq \sigma_A(b).$$

Außerdem gehört jeder Randpunkt von $\sigma_B(b)$ zu $\sigma_A(b)$. Wenn also $\sigma_B(b)$ keinen inneren Punkt enthält, ist $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.

Finden Sie ein Beispiel, wo nicht Gleichheit gilt?

Aufgabe 4
Es seien A eine Banachalgebra mit Einselement und U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\Omega = \{a \in A \mid \sigma(a) \subset U\}$$

in A offen ist. Demnach hängt das Spektrum $\sigma(a)$ (etwa im Sinne der Hausdorffmetrik auf kompakten Mengen) stetig von a ab.