Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 02.12.2011

7. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Stetiger Funktionalkalkül)

In allen Aufgaben sei X ein Hilbertraum.

Aufgabe 1
Sei $T \in L(X)$. Zeigen Sie:

(a) Ist T normal und $f \in C(\sigma(T))$, so gilt $f(T) \geq 0$ genau dann, wenn $f \geq 0$ ist.

(b) Ist $T \geq 0$ normal, so existiert ein eindeutig bestimmter beschränkter normaler Operator $S \geq 0$ mit $S^2 = T$ (Notation: $S = T^{1/2}$).

Hinweis: Geben Sie einen neuen Beweis mittels des Funktionalkalküls.

(c) Es existiert eine Polarzerlegung $T = PU$, wobei U eine Isometrie und P selbstadjungiert und positiv ist. Ist T invertierbar, so ist U unitär.

Aufgabe 2
Es sei G die Gruppe der invertierbaren Elemente in $L(X)$ und G_0 die Zusammenhangskomponente der identischen Abbildung. Beweisen Sie:

(a) Für jedes $T \in L(X)$ konvergiert die Reihe $e^T := \sum_{k=1}^{\infty} T^k/k!$. Kommutiert S mit T, so gilt

$$e^{S+T} = e^S e^T.$$

(b) Ist $T \in L(X)$ in der Form $T = e^S$ darstellbar, so ist $T \in G_0$. Dies ist für alle positiven normalen $T \in G$ der Fall.

Hinweis: Eine Zusammenhangskomponente einer offenen Menge ist immer offen. In einem normierten Raum ist eine offene Menge genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass im Falle eines komplexen Hilbertraumes $G_0 = G$ ist. Nach dem berühmten Satz von Stone, lässt sich jeder unitäre Operator in der Form $U = e^{iS}$ darstellen. Die Behauptung folgt dann aus der Polardarstellung (Aufgabe 1(c)) und Teil (b).

Aufgabe 3
Seien $T \in L(X)$ normal und $\lambda \in \rho(T)$. Zeigen Sie:

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}.$$

Aufgabe 4
Seien $S, T \in L(X)$ und T unitär. Beweisen Sie: Es gilt $Sf(T) = f(T)S$ für alle $f \in C(\sigma(T))$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Aussage auch für jedes normale T richtig ist (Satz von Fuglede).