Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 16.12.2011

9. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Signierte und komplexe Maße)

Aufgabe 1

Kann eine σ-Algebra abzählbar unendlich viele Elemente enthalten?

In allen folgenden Aufgaben sei $X \neq 0$ eine Menge und $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra.

Aufgabe 2

(a) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ ein Maß. Zeigen Sie, dass für jede Folge $(A_j) \subseteq \Sigma$ paarweise disjunkter Mengen die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ absolut konvergiert. Folgern Sie, dass

$$\mathfrak{M} = \{\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K} \mid \ \mu \text{ ist ein Maß}\}$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, der *Raum der $\mathbb{K}$-wertigen Maße* auf Σ.

(b) Es bezeichne $|\mu|$ die totale Variation eines Maßes μ auf ganz X ($|\mu| = \nu(\mu, X)$ in der Notation der Vorlesung). Beweisen Sie, dass

$$\|\mu\| = |\mu|(X)$$

eine Norm auf $\mathfrak{M}$ definiert, bezüglich derer $\mathfrak{M}$ ein Banachraum ist.

In den folgenden Aufgaben betrachten wir Maße, welche entweder Werte in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ annehmen. Solche Maße heißen in der Literatur auch signierte Maße.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass jede σ-additive Mengenfunktion $\mu\colon \Sigma \to [-\infty, +\infty]$ ($\mu(\emptyset) = 0$) ein signiertes Maß ist.

Hinweis: Hierbei ist die Wohldefiniertheit von Summen von Maßen disjunkter Mengen in die Definition der σ-Additivität einzuschließen. Es kann also nicht zwei disjunkte Mengen $A, B \in \Sigma$ mit $\mu(A) = +\infty$ und $\mu(B) = -\infty$ geben.

(b) Das signierte Maß μ sei auf zwei Weisen als Differenz $\mu = \mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2$ nichtnegativer Maße $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ auf Σ darstellbar. Gilt dann notwendigerweise $\mu_1 = \nu_1$ und $\mu_2 = \nu_2$?

Aufgabe 4

Eine Menge $E \subseteq X$ heißt *positiv*, wenn für alle $A \in \Sigma$ die Menge $E \cap A$ in Σ liegt und $\mu(A \cap E) \geq 0$ gilt. Entsprechend definiert man negative Mengen.

(a) Beweisen Sie, dass X die disjunkte Vereinigung einer positiven Menge E und einer negativen Menge F ist. Eine solche Zerlegung von X heißt *Hahn-Zerlegung*. Man kann sogar $E, F \in \Sigma$ erreichen.

(b) Eine Hahn-Zerlegung $X = E \cup F$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Zeigen Sie aber, dass die nichtnegativen Maße

$$\mu^+(A) := \mu(A \cap E) \quad \text{und} \quad \mu^-(A) := -\mu(A \cap F)$$

nicht von der Wahl der Zerlegung abhängen. Es gilt $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (*Jordan-Zerlegung*).

(c) Zeigen Sie weiterhin:

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \in \Sigma,\ B \subseteq A\}, \quad \mu^-(A) = -\inf\{\mu(B) \mid B \in \Sigma,\ B \subseteq A\}.$$

Aufgabe 5

Seien μ, ν zwei signierte Maße und $|\mu|, |\nu|$ ihre totalen Variationen auf X. Das Maß ν heißt absolut stetig bzgl. μ (Notation $\nu \ll \mu$), falls $\nu(A) = 0$ für alle $A \in \Sigma$ mit $|\mu|(A) = 0$ gilt. Beweisen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(i) $\nu \ll \mu$, (ii) $\nu^+ \ll \mu$ und $\nu^- \ll \mu$ (siehe Aufgabe 4), (iii) $|\nu| \ll |\mu|$.

Wir wünschen allen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!