Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 06.01.2012

10. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Messbare Funktionen, Integration)

In allen Aufgaben sei X eine nicht leere Menge und $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Algebra.

Aufgabe 1
Ist Σ eine σ-Algebra, so sollte folgendes bekannt sein (die Beweise sind aber nicht trivial):

(a) Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist schon dann Σ-messbar, wenn $f^{-1}([\alpha, +\infty)) \in \Sigma$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine punktweise konvergente Folge Σ-messbarer Funktionen, so ist auch $\lim_{n\to\infty} f_n$ Σ-messbar.

(c) Sind $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ Σ-messbar, so auch $f \pm g$ und fg.

Sei nun Σ nur als Algebra vorausgesetzt. Überprüfen Sie, ob (a) und (b) gültig bleiben. Zeigen Sie, dass (c) zumindest gilt, wenn g eine Σ-messbare Treppenfunktion oder $g = f$ ist.

Bemerkung: Wer eine Antwort auf die Frage findet, ob (c) für beliebige Σ-messbare Funktionen gilt, erhält eine unbestimmte Zusatzanzahl an Kreuzen.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie: Eine Σ-messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{K}$ ist genau dann gleichmäßig durch Σ-messbare Treppenfunktionen approximierbar, wenn sie beschränkt ist.

(b) Sei $\mathcal{T}(X, \Sigma)$ der Raum aller Σ-messbaren, $\mathbb{K}$-wertigen Treppenfunktionen auf X, $B(X, \Sigma)$ sein Abschluss in $\ell_\infty(X)$, sowie $\mathcal{M}(X, \Sigma)$ die Menge der Σ-messbaren Funktionen in $\ell_\infty(X)$. Zeigen Sie:

  (i) Im Allgemeinen ist $\mathcal{M}(X, \Sigma) \subsetneq B(X, \Sigma)$.

  (ii) Ist jedoch Σ eine σ-Algebra, so gilt Gleichheit.
  Folgerung: $\mathcal{T}(X, \mathcal{P}(X))$ liegt in $\ell_\infty(X)$ dicht.

Aufgabe 3
Sei $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ eine beschränkte, additive Mengenfunktion. Mit $|\mu|$ bezeichnen wir wieder die totale Variation von μ. Beweisen Sie für alle $f \in B(X, \Sigma)$ folgende „Dreiecksungleichung“:

$$\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}|\mu|.$$

Begründen Sie dabei zunächst, warum $|f| \in B(X, \Sigma)$.

Aufgabe 4
Seien $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty)$ eine σ-additive Mengenfunktion, $f \in \mathcal{M}(X, \Sigma)$ und $S \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen. Für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) > 0$ seien die Mittelwerte

$$m_A(f) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

Elemente von S. Beweisen Sie, dass dann $f(x) \in S$ „für fast alle“ $x \in X$, d.h. $\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus S)) = 0$.

Folgerung: Ist $\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$ für alle $A \in \Sigma$, so ist f identisch Null „μ-fast überall“.

Bemerkung: Kann man auf die σ-Additivität von μ wirklich nicht verzichten?