Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 13.01.2012

11. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Rieszscher Darstellungssatz)

Aufgabe 1
Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Implikationskette

$$X \text{ normal} \Rightarrow X \text{ vollständig regulär} \Rightarrow X \text{ regulär} \Rightarrow X \text{ hausdorffsch} \Rightarrow X\ T_1\text{-Raum} \Rightarrow X\ T_0\text{-Raum}.$$

Zeigen Sie darüberhinaus, dass metrische Räume und kompakte hausdorffsche Räume normal sind.

Aufgabe 2
Sei X ein kompakter topologischer Hausdorffraum, $\mu \in RCA(X)$ und $g \in B(X, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, dass dann μ_g definiert durch

$$\mu_g(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathcal{B},$$

ebenfalls in $RCA(X)$ liegt. Für alle $f \in B(X, \mathcal{B})$ gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu_g = \int_A f g \,\mathrm{d}\mu.$$

In den folgenden Aufgaben geht es um den Rieszschen Darstellungssatz in der von Riesz ursprünglich bewiesenen Form. Wir betrachten nur reelle Räume.

Aufgabe 3
Sei $a < b$. Die Variation einer Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ über einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$, $a \le \alpha < \beta \le b$, ist definiert als

$$\bigvee_\alpha^\beta(g) = \sup_Z \Big\{ \sum_{x_k \in Z \setminus \{\alpha\}} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \Big\}, \quad Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta.$$

Die Funktion g heißt *von endlicher Variation*, wenn $\bigvee_a^b(g) < \infty$ ist. Die Funktionen endlicher Variation bilden einen Untervektorraum $BV[a,b]$ von $B[a,b]$ (beschränkte Funktionen). Zeigen Sie:

(a) Nicht jede auf $[a.b]$ stetige Funktion ist von endlicher Variation, aber jede Lipschitz-stetige.

(b) (freiwillig) Für $x \in (\alpha, \beta)$ gilt $\bigvee_\alpha^x(g) + \bigvee_x^\beta(g) = \bigvee_\alpha^\beta(g)$.

(c) Eine Funktion ist genau dann von beschränkter Variation, wenn sie als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.
Hinweis: Offenbar ist $\pi(x) = \bigvee_a^x(g)$, $\pi(a) = 0$, monoton wachsend.

(d) Eine Funktion beschränkter Variation besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, und diese sind erster Art (das heißt, links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren).

(e) Die Relation $g_1 \sim g_2$, definiert durch $g_1(a) = g_2(a) + c$, $g_1(b) = g_2(b) + c$ und $g_1(x) = g_2(x) + c$ in allen gemeinsamen Stetigkeitspunkten für ein gewisses $c \in \mathbb{R}$, ist eine Äquivalenzrelation zwischen Funktionen beschränkter Variation. Jede Äquivalenzklasse besitzt genau einen in (a,b) rechtsstetigen Vertreter mit $g(a) = 0$. Die Menge dieser Vertreter bildet einen Vektorraum $BV_0[a,b]$, auf dem

$$\|g\|_{BV_0} = \bigvee_a^b(g)$$

eine Norm definiert.

Bitte wenden!

Aufgabe 4
Seien $f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b]$ und Z_m eine Folge von Zerlegungen mit $\max\limits_{x_k \in Z_m \setminus \{a\}} |x_k - x_{k-1}| \to 0$. Das *Stieltjes Integral* von f bezüglich g ist definiert als Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) := \lim_{m\to\infty} \sum_{x_k \in Z_m \setminus \{a\}} f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

Beweisen Sie:

(a) (freiwillig) Dieser Grenzwert existiert und hängt nicht von der Wahl der Folge Z_m ab.

(b) (freiwillig) Besitzt g eine stetige Ableitung, so ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(t) = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$ für alle $f \in C[a,b]$, so ist g zu 0 äquivalent (also $g = 0$ in $BV_0[a,b]$).

Aufgabe 5
Der Rieszsche Satz lautet:

Jedes stetige Funktional auf $C[a,b]$ ist von der Form $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ für ein $g \in BV[a,b]$.

Zeigen Sie, um den Zusammenhang zur Vorlesung herzustellen, folgendes (ohne Rückgriff auf den Darstellungssatz aus der Vorlesung):

(a) Sei $l \in (C[a,b])'$ und l' eine normerhaltende Fortsetzung auf $B[a,b]$. Dann ist

$$g_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = a, \\ l'(\chi_{[a,x]}) & \text{für } x \in (a,b], \end{cases}$$

eine Funktion beschränkter Variation und es gilt $l(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_l(x)$ für alle $f \in C[a,b]$.

(b) Die Abbildung

$$T\colon BV_0[a,b] \to (C[a,b])', \quad (Tg)(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

(c) Ist $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $[a,b]$, und μ ein reellwertiges, reguläres Borelmaß, so ist

$$g_\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = a, \\ \mu([a,x]) & \text{für } x \in (a,b], \end{cases}$$

von beschränkter Variation und es gilt $\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_\mu(x)$ für alle $f \in C[a,b]$. Die Abbildung $\mu \mapsto g_\mu$ ist ein isometrischer Isomorphismus von $RCA[a,b]$ nach $BV_0[a,b]$.

(d) Stellen Sie das Funktional $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$ als Stieltjes Integral dar und bestimmen Sie das zugehörige reguläre Borelmaß.