Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Patrick Winkert
André Uschmajew

Berlin, den 27.01.2012

13. Übungsblatt zur Vorlesung Funktionalanalysis 2

(Unbeschränkte Operatoren)

Ist nichts anderes gesagt, bezeichnet X einen komplexen Hilbertraum und $S, T\colon X \supseteq \mathcal{D}(S), \mathcal{D}(T) \to X$ lineare Operatoren.

Aufgabe 1

Zur Erinnerung: T heißt *abschließbar*, wenn der Abschluss $\overline{G(T)}$ des Graphen von T (bzgl. der Graphennorm) der Graph eines (dann abgeschlossenen) linearen Operators $\overline{T}$ ist.

Zeigen Sie, dass T genau dann abschließbar ist, wenn für jede Folge $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to 0$ und $Tx_n \to y$ gilt, dass $y = 0$ ist.

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist T bijektiv, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.

(b) Sei $S \in L(X)$, dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn $S + T$ abgeschlossen ist.

(c) Sei S abgeschlossen, dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn $S + T$ abgeschlossen ist.

(d) Es ist T genau dann abgeschlossen, wenn T *schwach abgeschlossen* ist, das heißt, wenn für jede Folge $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ mit $x_n \rightharpoonup x$ und $Tx_n \rightharpoonup y$ folgt, dass $Tx = y$ ist.

Aufgabe 3

Seien $X = \ell^2$, $\mathcal{D}(T) = c_0$ der Raum der finiten (abbrechenden) Nullfolgen und

$$T\colon X \supseteq \mathcal{D}(T) \to X\colon (x_n) \mapsto (nx_n).$$

Beweisen Sie, dass T weder beschränkt noch abgeschlossen ist. Ist T abschließbar, symmetrisch und/oder selbstadjungiert? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Abschluss von T.

Aufgabe 4

Seien S und T dicht definiert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $S + T$ dicht definiert, so ist $S^* + T^* \subseteq (S + T)^*$. Gleichheit gilt falls $S \in L(X)$, im Allgemeinen jedoch nicht (Gegenbeispiel?).

(b) Ist ST dicht definiert, so ist $T^*S^* \subseteq (ST)^*$. Gleichheit gilt falls $S \in L(X)$, im Allgemeinen jedoch nicht (Gegenbeispiel?).

Aufgabe 5

Sei $X = L^2(0,1)$ und

$$\mathcal{D}(T) = \{x \in L^2(0,1) \mid \ x' \text{ existiert fast überall und } x' \in L^2(0,1)\}$$

der Definitionsbereich des Operators

$$T\colon X \supseteq \mathcal{D}(T) \to X\colon x \mapsto x'.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$.

Hinweis: Ist $x \in L^1(0,1)$, so ist die Funktion $t \mapsto \int_{(0,t)} x(s)\,\mathrm{d}s$ fast überall differenzierbar (da absolutstetig) und ihre Ableitung fast überall gleich x.