Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

1. Blatt: Fehleranalyse, Kondition

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 31. Oktober 2011)

Aufgabe 1: **5 Punkte**
Betrachten Sie in der Vorlesung gezeigte Abschätzung

$$\frac{|\mathrm{rd}(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{-t+1}, \tag{1}$$

für alle $x \in [x_{min}, x_{max}]$, wobei rd der Rundungsoperator bezüglich den betrachteten **normalisierten** Fließkommazahlen $F(b, t, e_{min}, e_{max})$ ist. Vollziehen Sie am Beispiel $b = 10$, $t = 2$, $e_{min} = e_{max} = 0$ nach, dass die Abschätzung nicht scharf ist und geben Sie (für diesen Spezialfall) eine scharfe Abschätzung an! Stellen Sie ausgehend davon eine Vermutung an, wie man für allgemeines b und t (wobei b als gerade angenommen wird) die rechte Seite von (1) verändern könnte, damit (1) scharf wird!
Hinweis: Bei dieser Aufgabe muss kein großer Wert auf ein exaktes Ausformulieren der Beweise gelegt werden. Um die abschließende Vermutung zu zeigen setze man einen geeigneten Wert für x in die linke Seite von (1) ein und vereinfache den Ausdruck.

Aufgabe 2: **4+4+4 Punkte**
Man betrachte die folgende Tabelle, in der die Ausdrücke unter a) und unter b) jeweils benutzt werden können um das gleiche zu berechnen.

	a)	b)	
1.)	$(1+x)^2 - 1$	$x^2 + 2x$	$\|x\| \approx \text{eps}$
2.)	$\frac{e^x - 1}{x}$	$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$	$0 < x \leq \text{eps}$
3.)	$(1+x)(1-x)$	$1 - x^2$	$\|x\| \approx \text{eps}$

Bei welchen Ausdrücken tritt Auslöschung auf? Unterziehen sie sämtliche Ausdrücke einer Fehleranalyse! Werten Sie dann die Ausdrücke in Matlab für eine große Menge von relevanten x aus und plotten sie die Ergebnisse! Gibt die Fehleranalyse das reale Verhalten angemessen wieder?
Hinweis: Bitte die Plots und den entsprechenden Programmcode der Abgabe hinzufügen. Diese Aufgabe ist gleichzeitig die Programmieraufgabe.

Aufgabe 3: **1+2 Punkte**
Berechnen Sie die absolute und relative Kondition der folgenden Ausdrücke:

1.) $$f(n) := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

2.) $$f(x_1, \ldots, x_K) := \sum_{i=1}^{K} x_i, \qquad \text{an einer Stelle mit } f(x_1, \ldots, x_K) \neq 0.$$

Hinweis: Dies sind die Ausdrücke aus den Tutoriumsaufgaben 3 und 4.

Tutoriumsaufgaben: In der Woche 24. - 28. Oktober 2011

Aufgabe 1:
Es beschreibe $ax+b$ mit $a \neq 0$ eine Gerade und es bezeichne x_0 deren eindeutige Nullstelle. Es beschreibe die Funktion $f : \mathbb{R}_* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a, b) = x_0$, das Verfahren, welches aus den Koeffizienten die Nullstelle berechnet. Berechnen Sie die relative und absolute Kondition des Verfahrens!

Aufgabe 2:
Man berechne die absolute und relative Kondition beim Wurzelziehen und Quadrieren, d.h. der folgenden Verfahren:

1.) $f(x) := x^2$ für kleine und große x.

2.) $f(x) := \sqrt{x}$ für kleine und große x, jeweils mit $x \geq 0$.

Aufgabe 3:
Bei welchen der beiden folgenden (analytisch gleichen) Ausdrücke tritt Auslöschung auf?

$$\text{a)}\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad \text{b)}\ \frac{1}{n(n+1)}$$

Man unterziehe die beiden Ausdrücke einer Fehleranalyse!

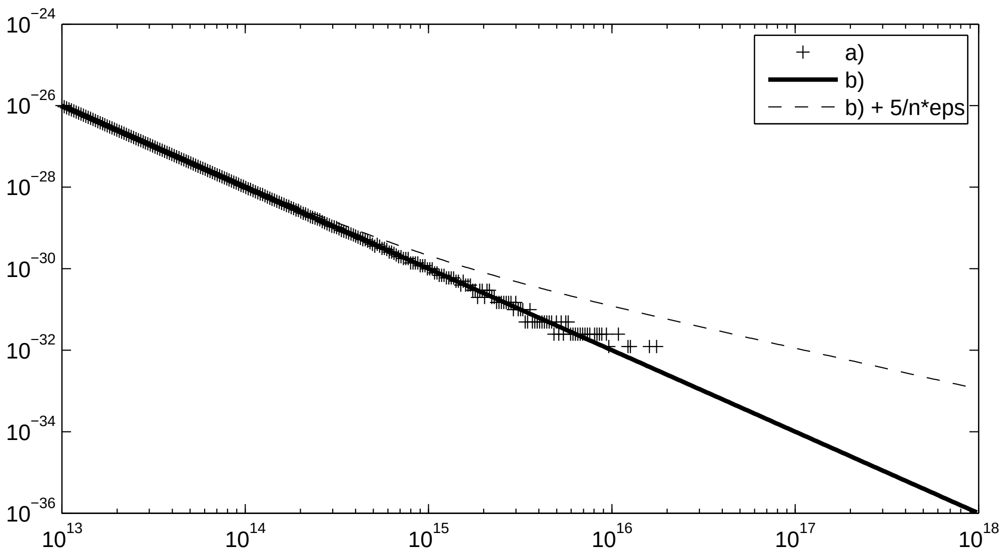

Abbildung 1: Die beiden Ausdrücke aus Aufgabe 3 für ausgewählte n

Aufgabe 4:
Man unterziehe die endliche Summation

$$\sum_{i=1}^{K} x_i,$$

mit $K \in \mathbb{N}$ und $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, K$, einer Fehleranalyse!