Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

11. Blatt: Implizite- und Mehrschritt-Verfahren

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 23. Januar 2012)

Aufgabe 1: **0+1+2+3 Punkte**

Es sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, wobei auch $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als unendlich oft differenzierbar angenommen wird. Geben Sie

$$\dot{y}(t), \quad \ddot{y}(t), \quad y^{(3)}(t) \quad \text{und} \quad y^{(4)}(t)$$

als eine Funktion an, die nur von f und y (nicht aber den Ableitungen von y) abhängt.
Hinweis: Sie können die folgende Notation verwenden:

$$\begin{array}{ll} f := f(t, y(t)) & y := y(t), \\ f_t := f_t(t, y(t)) := \frac{\partial}{\partial t} f(t, y(t)) & \dot{y} := \dot{y}(t), \\ f_y := f_y(t, y(t)) := \frac{\partial}{\partial y} f(t, y(t)) & \ddot{y} := \ddot{y}(t), \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Diese Aufgabe ist teilweise Wiederholung.

Aufgabe 2: **2+2 Punkte**

Bestimmen Sie $\alpha, \beta > 0$, so dass das implizite Verfahren welches durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \alpha & \beta \end{array}$$

gegeben ist mindestens die Konsistenzordnung 3 hat. Zeigen Sie auch, dass die Konsistenzordnung mindestens 3 ist.

Aufgabe 3: **3+3 Punkte**

Bestimmen Sie $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass das Mehrschritt-Verfahren

$$y_{k+3} + \gamma\,(y_{k+2} - y_{k+1}) - y_k = h\frac{3+\gamma}{2}\Big(f(t_{k+2}, y_{k+2}) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\Big)$$

die maximale Konsistenzordnung besitzt. Bestimmen Sie für dieses feste γ a) die genaue Konsistenzordnung und b) ob das Verfahren Nullstabil sind.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Bestimmen Sie das 2-schrittige Adams-Moulton-Verfahren.
Hinweise: Sie können die Notation und auch die Rechnungen, die in Tutoriumsaufgabe 4 durchgeführt wurden, benutzen (ohne diese extra zu wiederholen).

Bitte wenden!!!

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 26. Januar 2012

In dieser Programmieraufgabe soll das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren programmiert werden. Laden Sie das Zip-Archiv von der Webseite herunter und implementieren sie eine Funktion

```
function [times, sols] = adams_bashforth(n, a, b, func_f, y0),
```

welche eben das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren implementiert (vgl. Skript Seite 149 oder Tutoriumsaufgabe 4) um ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= & f(t, y(t)) \quad \text{auf } t \in [\mathtt{a}, \mathtt{b}] \\ y(\mathtt{a}) &= & \mathtt{y0} \end{cases}$$

auf einem äquidistantem Gitter $t_0 < \ldots < t_{\mathtt{n}}$ mit `n` Gitterpunkten zu lösen. Das Gitter soll dabei (natürlich) den Bedingungen $t_0 = a$ und $t_{\mathtt{n}} = b$ genügen. Die Auswertung der rechten Seite erfolgt durch den *Funktions-Handle* `func_f`, der wie gewohnt auf eine Funktion der Form

```
function f = func_f(t, y)
```

referenziert. Die Anlaufrechnung (zur Bestimmung der ersten beiden Approximationen $\mathtt{y1} \approx y(t_1)$ und $\mathtt{y2} \approx y(t_2)$) soll mit dem *klassischen* Runge-Kutta-Verfahren, welches in der Programmieraufgabe von Blatt 9 implementiert wurde, ausgeführt werden.
Für die Abnahme ist es erforderlich, dass das der Aufruf

```
>> RUNME(true)
```

fehlerfrei druchläuft und eine Ausgabe erzeugt, die wie in Abbildung 1 aussieht.

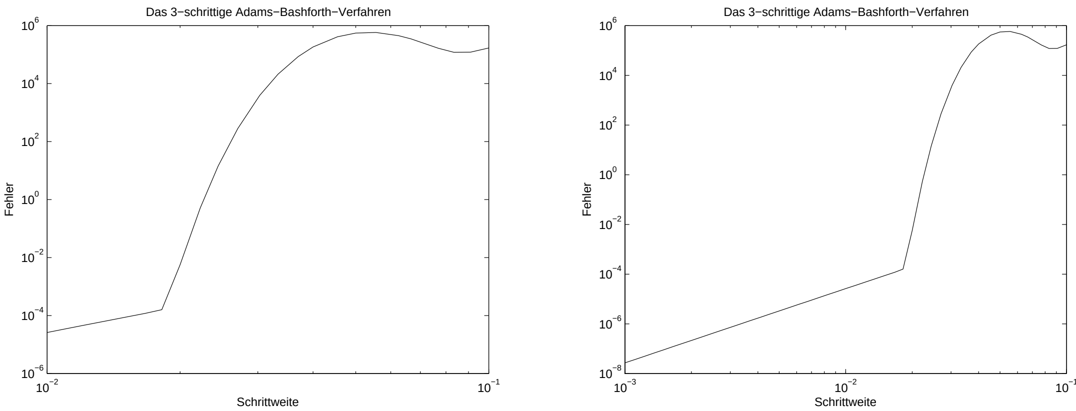

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgaben von `RUNME` (links) und `RUNME(true)` (rechts)

Tutoriumsaufgaben: Im Zeitraum 13.1. - 19.1.2012

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, so dass das implizite Runge-Kutta-Verfahren, welches durch die Butcher-Tabelle

$$\begin{array}{c|cc} \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegeben ist, die Konsistenzordnung 2 hat. Zeigen Sie, dass ein solches Verfahren niemals die Konsistenzordnung 3 haben kann.

Aufgabe 2:
Betrachten Sie das folgende Mehrschritt-Verfahren:

$$u_{k+2} - u_k = \frac{h}{3} \Big(\, f(t_{k+2}, y_{k+2}) + 4f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k) \, \Big)$$

Bestimmen Sie a) die maximale Konsistenzordnung und b) ob das Verfahren Nullstabil sind.

Aufgabe 3:
Sei $m \geq 2$. Sind die folgenden Mehrschritt-Verfahren nullstabil?

1. $$u_{k+m} = u_{k+m-1} + h\Phi(f, t_k, y_k, \ldots, y_{k+m}; h)$$
2. $$u_{k+m} = 2u_{k+m-1} - u_{k+m-2} + h\Phi(f, t_k, y_k, \ldots, y_{k+m}; h)$$
3. $$u_{k+m} = u_{k+m-2} + h\Phi(f, t_k, y_k, \ldots, y_{k+m}; h)$$
4. $$u_{k+m} = u_k + h\Phi(f, t_k, y_k, \ldots, y_{k+m}; h)$$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie das 3-schrittige Adams-Bashforth-Verfahren.