Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

12. Blatt: Eigenwertprobleme

Hausaufgaben: **(freiwillige Abgabe beim Tutor)**
Die Punkte dienen nur als Orientierung dazu, damit man weiß wie aufwendig die einzelnen Aufgaben sind.

Aufgabe 1: **0+3+1+2+3 Streberpunkte**
Es seien $P_K, \ldots, P_0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ und damit das Matrixpolynom

$$P(\lambda) := \lambda^K P_K + \ldots + \lambda P_1 + P_0, \tag{1}$$

gegeben. Dann heißt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ein *verallgemeinerter Eigenwert* zum *verallgemeinerten Eigenvektor* $v_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (oder kurz heißt (λ_0, v_0) *verallgemeinertes Eigenpaar*), falls gilt

$$P(\lambda_0)v_0 = 0.$$

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie, dass (λ_0, v_0) ein Eigenpaar von A im gewöhnlichen Sinne ist, genau dann wenn (λ_0, v_0) ein verallgemeinertes Eigenpaar von $\lambda I - A$ ist.

2. Angenommen $P_K = I$ ist die Identität. Zeigen Sie, dass (λ_0, v_0) ein verallgemeinertes Eigenpaar von P wie in (1) ist, genau dann wenn (λ_0, v_0) ein Eigenpaar im gewöhnlichen Sinne von der sog. *Begleitmatrix* (engl. Companion matrix)

$$C_P := \begin{bmatrix} 0 & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -I \\ P_0 & \cdots & P_{K-2} & P_{K-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nK,nK}.$$

3. Seien $E, A \in \mathbb{R}^{n,n}$ wobei E als invertierbar angenommen wird. Zeigen Sie, dass (λ_0, v_0) ein verallgemeinertes Eigenpaar von $\lambda E - A$ ist, genau dann wenn (λ_0, v_0) ein Eigenpaar im gewöhnlichen Sinne von $E^{-1}A$ ist.

4. Es beschreibe die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Diskretisierung des Laplace-Operators mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen, d.h. es sei A symmetrisch und negativ definit (vgl. etwa Aufgabe 1 von Blatt 3). Da dann also die verallgemeinerten Eigenwerte von $\lambda I - A$ alle in der linken Halbebene $\mathbb{C}_-$ sind, folgt aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, dass das Anfangswertproblem

   $$\text{(Ortsdiskrete Wärmeleitungsgleichung)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + f(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

   für jedes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger eine eindeutige Lösung hat die gegen Null konvergiert, d.h. $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

   Ähnlich wird das asymptotische Verhalten des Anfangswertproblems zweiter Ordnung

   $$\text{(Ortsdiskrete Wellengleichung)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{c^2}\ddot{x}(t) & = & Ax(t) + f(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

   (wobei $c \in \mathbb{R}_{>0}$) durch die verallgemeinerten Eigenwerte von $\lambda^2 \frac{1}{c^2} I - A$ beschreiben. Lange Rede, kurzer Sinn: Zeigen Sie, dass alle verallgemeinerten Eigenwerte von $\lambda^2 I - A$ rein imaginär sind.

5. Sei x eine Lösung von (2). Zeigen Sie, dass dann die Veränderung der Energie

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\dot{x}^T(t)\dot{x}(t) - x^T(t)Ax(t)\right)$$

durch die externen Kräfte f in folgender Form beeinflusst wird

$$\frac{d}{dt}E(t) = \dot{x}^T(t)f(t).$$

Aufgabe 2: **0+2+4+1 Streberpunkte**

Es bezeichne $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$ die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, die $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}^n$ abbilden. Für $x \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ heiße die Funktion $X : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^N$ gegeben durch

$$X(\lambda) := \mathfrak{L}\left\{x\right\}(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\lambda t}dt,$$

die (beidseitige) Laplace-Transformierte von x.

1. Überlegen Sie sich, dass X wohldefiniert ist.
2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ linear ist, d.h., dass

   $$\mathfrak{L}\left\{\alpha x_1 + \beta x_2\right\} = \alpha\mathfrak{L}\left\{x_1\right\} + \beta\mathfrak{L}\left\{x_2\right\},$$

   für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $x_1, x_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$.
3. Zeigen Sie, dass

   $$\mathfrak{L}\left\{x^{(k)}\right\} = \lambda^k\mathfrak{L}\left\{x\right\},$$

   für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$.
4. Es seien $x, f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}^n)$ und $P_K, \ldots, P_0 \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit

   $$P_K x^{(K)}(t) + \ldots + P_1 x^{(1)}(t) + P_0 x(t) = f(t),$$

   für alle $t \in \mathbb{R}$. Man setze $X := \mathfrak{L}\left\{x\right\}$, $F := \mathfrak{L}\left\{f\right\}$ als die Laplace-Transformierten von x, f und das Matrix-Polynom P sei durch

   $$P(\lambda) := \lambda^K P_K + \ldots + \lambda P_1 + P_0,$$

   definiert. Zeigen Sie, dass dann gilt

   $$P(\lambda)X(\lambda) = F(\lambda).$$

Aufgabe 3: **2 Streberpunkte**

Es sei (λ_0, v_0) ein verallgemeinerter Eigenwert von

$$P(\lambda) := \lambda^K P_K + \ldots + \lambda P_1 + P_0,$$

und es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine skalare Funktion. Man definiere die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ durch $f(t) := v_0 g(t)$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}v_0\left(1 + \int_0^t e^{-\lambda_0\tau}g(\tau)d\tau\right)$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_K x^{(K)}(t) + \ldots + P_1 x^{(1)}(t) + P_0 x(t) &=& f(t), \\ x^{(K-1)}(0) &=& \lambda_0^{K-1}v_0, \\ &\vdots& \\ x^{(1)}(0) &=& \lambda_0 v_0, \\ x(0) &=& v_0 \end{array}\right. ,$$

ist.