Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

2. Blatt: Normen, Konditionszahl, LR-Zerlegung

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 7. November 2011)

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Lösen Sie das System $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ durch LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Berechnen Sie die Cholesky Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -6 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 18 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Berechnen Sie die Kondition der Matrix $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.

Aufgabe 4: **2+1+2+1+1+2+1 Punkte**

Es bezeichne $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf dem $\mathbb{R}^n$ und gleichzeitig

$$\|A\| := \max_{z\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|z\|=1} \|Ax\|,$$

die induzierte Matrixnorm. Es bezeichnen A, B geeignete Matrizen und $b \neq 0$ einen Vektor mit passender Dimensionen. Zeigen Sie:

1. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ und damit $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ und $1 \leq \kappa(A)$
2. $\frac{1}{\|A^{-1}b\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$
3. $\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Zeigen Sie noch, dass für die speziellen Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_F$ gilt:

4. $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$ für $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $|y^T x| \leq \|y\|_1 \cdot \|x\|_\infty$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$
5. $\kappa_2(Q) = 1$ für orthogonales Q
6. $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$, d.h. Submultiplikativität der Frobeniusnorm
7. $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$, für alle $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $x \in \mathbb{R}^m$, d.h. Verträglichkeit von $\|\cdot\|_F$ mit $\|\cdot\|_2$

Bitte wenden!!!

Aufgabe 6: **3 Punkte**

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix und $A = U\Sigma V^T$ ihre Singulärwertzerlegung, d.h. die Diagonalmatrix $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min(n,m)}) \in \mathbb{R}^{n,m}$ enthalte die Singulärwerte $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{\min(n,m)} \geq 0$ und die quadratischen Matrizen U, V seinen orthogonal. Sei $r \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass dann

$$\hat{C} := U \cdot \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \cdot V^T$$

die beste Rang r Approximation an A ist, d.h. dass die Gleichung

$$\min_{\substack{C \in \mathbb{R}^{n,m} \\ \operatorname{rang}(C) \leq r}} \|A - C\|_F^2 = \|A - \hat{C}\|_F^2 = \sigma_{r+1}^2 + \ldots + \sigma_{\min(n,m)}^2$$

erfüllt.

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 11.November 2011

Programmieren Sie die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung und, dazu passend, das Vorwärts-Rückwärts-Einsetzen. Schreiben sie dazu eine Funktion

```
function fact = lr_zerlegung(A)
```

welche die LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung einer Matrix berechnet und in der Struktur `fact` (`>> help struct`) derart speichert, dass die zweite Funktion, welche Sie schreiben sollen,

```
function x = vor_rueck(fact, b)
```

damit das Gleichungssystem $Ax = b$ löst. Sie können gerne die auf der Webseite des Kurses hinterlegten Templates benutzen und sollten sich bei der Implementierung an den ,,Algorithmischen Ansatz" halten, wie er in den Slides (welche ebenfalls auf der Webseite des Kurses hinterlegt sind) beschrieben wird.
Laden Sie noch die Datei `RUNME.m` von der Webseite des Kruses herrunter und führen Sie diese im gleichen Verzeichnis aus. Die Datei muss fehlerfrei durchlaufen und eine Ausgabe produzieren, die in etwa wie in Abbildung 1 aussieht.

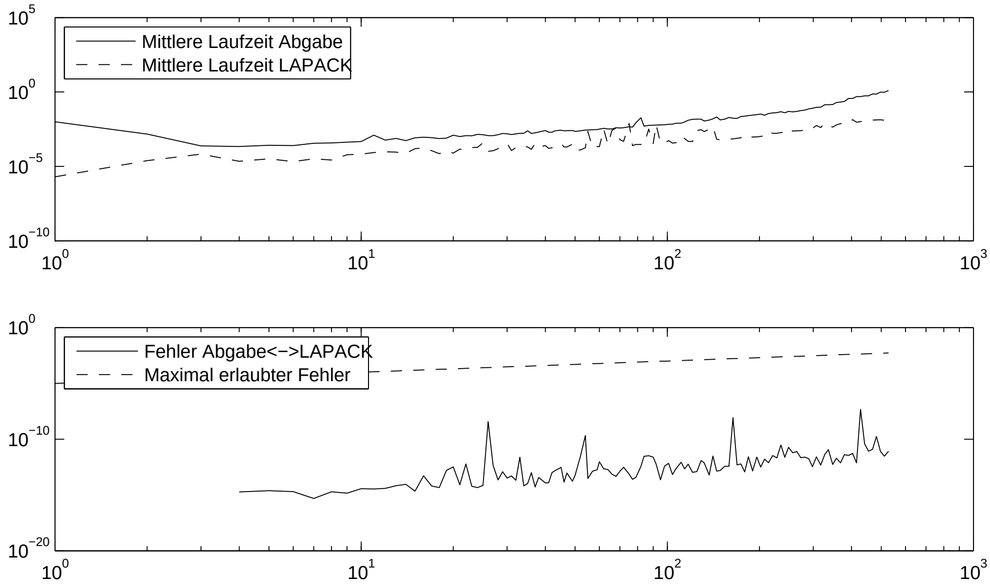

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME

Die Abnahmen werden im Unix-Pool während den Sprechzeiten der Tutoren durchgeführt.

Tutoriumsaufgaben: In der Woche 31.10. - 4.11.2011

Aufgabe 1:
Lösen Sie die Systeme $A_i x_i = b_i$ mit $i = 1, 2$ für

$$A_1 := \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 6 & -10 & 10 \\ -6 & 6 & -12 \end{bmatrix},\ b_1 := \begin{bmatrix} 27 \\ 46 \\ -54 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 := \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ b_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

durch LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung.

Aufgabe 2:
Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

hat die exakte Lösung

$$x = \frac{1}{999} \begin{bmatrix} 1000 \\ 998 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösen Sie (1) nun auf einer Maschine mit $\mathbb{F}(10, 2, -\infty, \infty)$ durch die LR-Zerlegung, einmal mit und einmal ohne Pivotisierung.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Cholesky Zerlegung der Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4: (vgl. Theorem 1.22 aus der Vorlesung)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_2 = \sigma_1, \qquad \text{(Spektralnorm)}$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_{\min\{n,m\}}^2}, \qquad \text{(Forbeniusnorm)}$$

wobei $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{\min\{n,m\}} \geq 0$ die Singulärwerte von A bezeichnen.
Überlegen Sie sich, dass $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar ist, genau dann wenn $\sigma_n > 0$. In diesem Fall ist dann auch $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$ und $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Aufgabe 5:
In der Übung wurde gezeigt, dass für invertierbares A gilt

$$\inf_{B \text{ singulär}} \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} \right\} \geq \frac{1}{\kappa(A)}. \tag{2}$$

Benutzen Sie die Singulärwertzerlegung um zu zeigen, dass für die $\|\cdot\|_2$-Norm sogar Gleichheit gilt.