Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

3. Blatt: Symmetrische Probleme, Iterative Verfahren

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 14. November 2011)

Aufgabe 1: **3+2 Punkte**

1. Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 4-mal stetig differenzierbar. Benutzen Sie die Taylorentwicklung um zu zeigen, dass die finite Differenz
$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} =: v_x(h) \tag{1}$$
zweite Ordnung hat, d.h. zeigen Sie, dass
$$|u''(x) - v_x(h)| = \mathcal{O}(h^2) \text{ für } h \to 0.$$

2. Benutzen Sie (1) um das Randwertproblem
$$\begin{cases} u''(x) = -1 & \text{für } x \in (0,1) \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \{0,1\} \end{cases} \tag{2}$$
auf äquidistantem Gitter $x_i = h \cdot i$ mit $h = \frac{1}{n+1}$ zu diskretisieren, d.h. geben sie $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^{n,1}$ an, sodass die Lösung von
$$Av = b \tag{3}$$
eine Approximation (zweiter Ordnung) $v_i \approx u(x_i)$ von (2) ist.

Aufgabe 2: **3+1+3 Punkte**

Es sei die Matrix
$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$
gegeben.

1. Benutzen Sie einen Satz aus Vorlesung, um zu zeigen, dass das Jacobi-Verfahren, angewendet auf A, stets konvergiert.
2. Geben Sie ein Beispiel für eine schwach diagonal dominante Matrix mit positiven Diagonalelementen an, die **nicht** positiv definit ist (wohl aber positiv semi-definit).
3. Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 3: **3+3+2 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine tridiagonal Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Um eine LR-Zerlegung zu berechnen macht man den Ansatz

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \gamma_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & 1 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie Rekursionsformeln für die Berechnung der α_i, β_i, und γ_i an.
2. Bestimmen Sie Rekursionsformeln für die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = y$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung.
3. Wie groß ist der asymptotische Rechen- und Speicher-Aufwand für die LR-Zerlegung und das Lösen.

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 18.November 2011

Programmieren Sie die LR-Zerlegung für Tridiagonalsysteme nach dem in Hausaufgabe 3 bestimmten Algorithmus. Schreiben sie dazu eine Funktion

```
function [alpha,beta,gamma] = tridiag_factor(a,b,c)
```

welche den Algorithmus der in Hausaufgabe 3 betrachtet wurde implementiert. Dabei sollen die Matlab Vektoren $\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{alpha}, \texttt{beta}, \texttt{gamma} \in \mathbb{R}^{n,1}$ als n-elementige Spaltenvektoren betrachtet werden, wobei $\texttt{a}$ die Diagonalelemente von A, $\texttt{b(1:n-1)}$ die Superdiagonalelemente von A, $\texttt{c(2:n)}$ die Subdiagonalelemente von A, $\texttt{gamma(2:n)}$ die Subdiagonalelemente von L, $\texttt{alpha(1:n)}$ die Diagonalelemente von R und $\texttt{beta(1:n-1)}$ die Superdiagonalelemente von R enthält, eben ganz wie in (4). Schreiben Sie dann noch eine Funktion

```
function x = tridiag_solve(alpha, beta, gamma, y)
```

welche damit das Gleichungssystem $Ax = y$ löst.
Laden Sie dann die Datei `RUNME.m` von der Webseite des Kruses herrunter und führen Sie diese im gleichen Verzeichnis aus. Die Datei muss fehlerfrei durchlaufen und eine Ausgabe produzieren, die in etwa wie in Abbildung 1 aussieht.

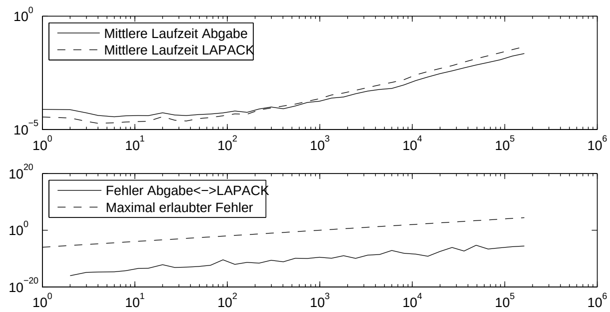

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME

Tutoriumsaufgaben: In der Woche 7.11. - 11.11.2011

Aufgabe 1:
Berechnen Sie eine (dünne) Singulärwert-Zerlegung der Matrizen

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2:
Die Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt strikt diagonal dominant, falls

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

für $i = 1, \ldots, n$.

1. Zeigen Sie, dass jede symmetrische und strikt diagonal dominante Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit positiven Diagonalelementen positiv definit ist.
2. Geben Sie ein Beispiel einer positiv definiten Matrix, die nicht strikt diagonal dominant ist.

Die Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt schwach diagonal dominant, falls

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

für $i = 1, \ldots, n$.

3. Zeigen Sie, dass jede symmetrische und schwach diagonal dominante Matrix $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit nicht-negativen Diagonalelementen positiv semi-definit ist.
4. Geben Sie ein Beispiel einer positiv semi-definiten Matrix, die nicht schwach diagonal dominant ist.

Aufgabe 3:
Handelt es sich bei den folgenden Matrizen um reduzible oder irreduzible Matrizen:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -13 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4:
Geben Sie für die Matrix $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ die Iterationsmatrix S und deren Spektralradius an; einmal für das Gesamtschrittverfahren und einmal für das Einzelschrittverfahren.
Führen Sie mit jedem Verfahren einen Schritt aus mit Startwert $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und rechter Seite $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.