Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

4. Blatt: Iterations-Verfahren, CG-Verfahren

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 21. November 2011)

Aufgabe 1: **1+2+4 Punkte**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare streng konkave Funktion von der das Maximum berechnet werden soll, d.h., es soll der eindeutige Punkt $x^* \in [a, b]$ bestimmt werden, für den gilt $\max_{x\in[a,b]} f(x) = f(x^*)$.

1. Geben Sie ein Newton-Verfahren zur Bestimmung von x^* an.
2. Manchmal kann man jedoch die Ableitung nicht ausrechnen und muss auf ein anderes Verfahren zurückgreifen. Überlegen Sie sich ein Beispiel (nur den Graph zeichnen; bitte keine Formeln), dass das Bisektionsverfahren

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}], & \text{falls } f(a_k) > f(b_k) \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k], & \text{falls } f(a_k) < f(b_k) \end{cases}$$

   mit $[a_0, b_0] := [a, b]$ im allgemeinen nicht gegen x^* konvergiert (d.h. geben Sie ein Gegenbeispiel).
3. Geben Sie ein Trisektionsverfahren an, welches nur auf Auswertungen von f beruht und das (für obiges f) stets gegen x^* konvergiert. Beweisen Sie die Konvergenz für obiges f.

Aufgabe 2: **1+2+3 Punkte**

Seien $A_i \subset \mathbb{R}^n$. Erfüllen die folgenden Abbildungen $F_i : A_i \to \mathbb{R}^n$ die drei Vorraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes:

a) Kontraktivität von F_i (nur bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ Norm zu prüfen)?

b) abgeschlossener Definitionsbereich A_i?

c) Selbstabbildung $F_i(A_i) \subset A_i$?

Welche der Iterationen konvergiert lokal quadratisch?

1.) $n = 1,\quad A_1 = (0, 2),\quad F_1(x) = \dfrac{1}{x}$

2.) $n = 1,\quad A_2 = [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]\quad F_2(x) = 2x - x^2$

3.) $n = 2,\quad A_3 = [-10, 10] \times [-10, 10],\quad F_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + \frac{\sin(x)}{4} + y \\ 1 + \sin(y) + x \end{bmatrix}$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Führt man das CG-Verfahren für A und b aus, so werden in jedem Schritt die Residuen der Form $r := Ax - b$ ausgerechnet. Zeigen Sie, dass r gleich dem Gradienten des Energiefunktionals $\mathcal{J}(x) := \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$ ist, d.h., dass $r = \nabla\mathcal{J}(x)$.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 4: (zur Programmieraufgabe) **1+3 Punkte**

In der Vorlesung wurde das CG-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen der Form

$$Ax = b,$$

wobei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ positiv definit ist, betrachtet. Will man nun mit invertierbarem $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $c \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem

$$Bx = c,$$

lösen, kann man das *CGNR*-Verfahren, d.h. das CG-Verfahren für $A := B^T B$ und $b = B^T c$, betrachten. Es bezeichne $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ die Folge der Iterierten des CG-Verfahrens mit $A = B^T B$ und $b = B^T c$.

1. Zeigen Sie folgendes. A ist positiv definit und x ist Lösung von $Bx = c$ genau dann, wenn x Lösung der **N**ormalengleichung $Ax = b$ ist.

2. Benutzen Sie einen Satz aus der Vorlesung um zu zeigen, dass

$$\|Bx_k - c\|_2 = \min_{x \in \mathcal{K}_k(B^T B, B^T c)} \|Bx - c\|_2,$$

für alle $k = 1, 2, \ldots$, d.h., das CGNR Verfahren minimiert die **R**esiduen.

Programmieraufgabe: (vgl. Aufgabe 4) Abgabe bis zum 25.November 2011

Programmieren Sie das CG-Verfahren zur Lösung des Normalengleichungssystems

$$B^T Bx = B^T b,$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare Matrix ist. Schreiben Sie dazu eine Funktion

```
function [x, residuals] = cgnr(B, c, maxres)
```

Dabei sollen Sie nicht die (numerisch kostspielige) Matrix-Matrix-Multiplikation $B^T B$ ausführen, sondern nur Matrix-Vektor-Multiplikationen verwenden. Der Parameter `maxres` gibt dabei an, bei welchem Residuum (gemessen in der euklidischen Norm) der Algorithmus abgebrochen werden kann. Der Ausgabeparameter `x` soll dann die k-te Iterierte des CGNR-Verfahrens enthalten, welche eben

$$\|Ax_k - b\|_2 \leq \texttt{maxres},$$

erfüllt (falls man exakt rechnen würde). Der Ausgabeparameter `residuals` soll die euklidischen Normen der Residuen enthalten und so lang sein, wie die Anzahl der Iterationen, die durchgeführt wurde. Ausserdem wäre es besser, wenn der Speicheraufwand für die Iterierten nicht mit der Anzahl der Iterationen wächst.

Testen Sie das Programm wieder mit der `RUNME.m` von der Webseite. Die Datei muss fehlerfrei durchlaufen und eine Ausgabe produzieren, die in etwa wie in Abbildung 1 aussieht.

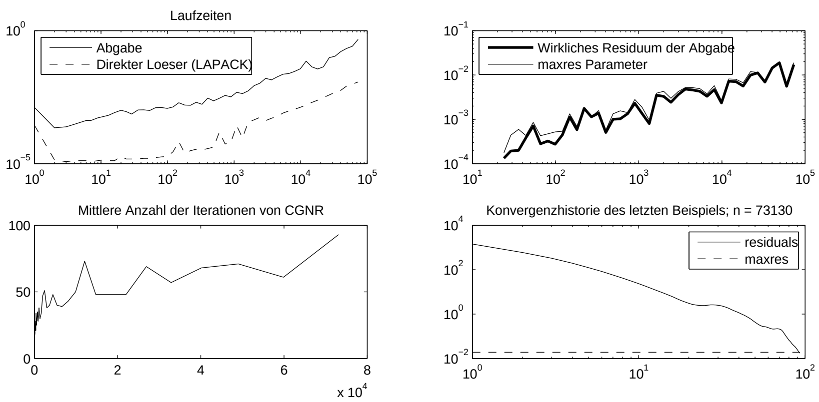

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME

Tutoriumsaufgaben: In der Woche 14.11. - 18.11.2011

Aufgabe 1:
Überlegen Sie sich an drei Beispielen von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass die drei Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (Kontraktivität, Abgeschlossenheit, Selbstabbildung) im allgemeinen notwendig sind.

Aufgabe 2:
Erfüllen die folgenden Funktionen die Vorraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (benutzen Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm)? Falls nein, wie kann man den Definitionsbereich ändern, damit die Vorraussetzungen erfüllt sind. Welche der Iterationen konvergiert lokal quadratisch?

$$
\begin{array}{llr}
1.)\ n = 1, & A_1 = [-1, 1], & F_1(x) = \cos(x) \\
2.)\ n = 1, & A_2 = [\frac{1}{1000}, 2], & F_2(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) \\
3.)\ n = 3, & A_3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1], & F_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}x_1^2 + \frac{1}{10}x_2^2 + \frac{1}{10}x_3^2 \\ \frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 \\ \frac{1}{10}x_1x_2x_3 + \frac{3}{10} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Aufgabe 3:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$ und seien $L, D, R \in \mathbb{R}^{n,n}$ der strikt-untere-, der diagonal- und der strikt-obere-Anteil von A. Sei $\omega \in (0, 2)$.
In der Vorlesung wurde das SOR-Verfahren (Gauß-Seidel-Verfahren mit sukzessiver Überrelaxation) als die Iteration

$$x_{k+1} = S_\omega x_k + B^{-1} b, \tag{1}$$

angegeben, wobei

$$S_\omega := (D + \omega L)^{-1} \left[(1 - \omega)D - \omega R\right], \qquad \text{und} \qquad B := \frac{1}{\omega}(D + \omega L).$$

Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^n$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, genau dann wenn x ein Fixpunkt von (1) ist! Was ist die Kontraktionskonstante der Iteration (1)?

Aufgabe 4:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Es bezeichne

$$\mathcal{K}_k := \operatorname{span}\left(b, Ab, \ldots, A^{k-1}b\right)$$

den *Krylovraum* zu A und b. Es sei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_{m+1}$. Man zeige, dass in diesem Fall

1. Für $k \leq m$ ist die Dimension von $\mathcal{K}_k$ durch k gegeben ist.
2. $\mathcal{K}_m$ ist A-invariant, d.h., $A\mathcal{K}_m \subset \mathcal{K}_m$
3. Es sei $V \in \mathbb{R}^{n,m}$ eine Matrix mit orthonormalen Spalten, für die gilt $\text{Bild}(V) = \mathcal{K}_m$. Dann ist jeder Eigenwert von $V^T A V$ auch Eigenwert von A.
4. Ist A invertierbar, so ist die Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist in $\mathcal{K}_m$ enthalten, d.h. $x \in \mathcal{K}_m$.