Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

5. Blatt: Newton-Verfahren, Projektoren

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 28. November 2011)

Aufgabe 1: **2+1 Punkte**

1. Es soll der Term $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$ berechnet werden. Geben Sie ein Funktion f und einen möglichst großen Definitionsbereich an, sodass das entsprechende Newton-Verfahren stets gegen $\sqrt[n]{a}$ konvergiert.
2. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie das das Newton-Verfahren angewendet auf die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) := Ax - b$ mit Ordnung 1234 konvergiert.

Hinweise: Benutzen Sie Tutoriumsaufgabe 1. für Teil 1. Teil 2. ist eine Fangfrage.

Aufgabe 2: **3 Punkte**
Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Nullstelle, sodass das Differential $Df(x^*)$ invertierbar ist.
Zeigen Sie, dass das vereinfachte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - (Df(x_0))^{-1} f(x_k)$$

für alle Startwerte x_0 aus einer Umgebung U von x^* linear gegen die Eindeutige Nullstelle x^* konvergiert.

Aufgabe 3: **2+3 Punkte**
Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix. Da in diesem Fall alle Eigenwerte reell sind ist $(x^*, \lambda^*) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ein Eigenpaar mit $\|x^*\|_2 = 1$ genau dann wenn (x^*, λ^*) eine Nullstelle der Funktion $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} \lambda x - Ax \\ \frac{1}{2}\|x\|_2^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)$$

ist.

1. Geben Sie das Newton-Verfahren an zur Berechnung von (x^*, λ^*) an.
2. Sei nun (x^*, λ^*) ein Eigenpaar, sodass λ^* Vielfachheit 1 hat. Zeigen Sie, dass dann das Differential an dieser Stelle $Df(x^*, \lambda^*)$ regulär ist.

Aufgabe 4: **2 Punkte**
Führen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren aus, um das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy} + x^2 + y - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Benutzen Sie die Startwerte $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 5: **2+2+1+1+1 Punkte**

In der Übung 5 wurde der Begriff des Projektors eingeführt. Sei $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ und setze $Q := I - P$. Seien $W, V \subset \mathbb{R}^n$ Teilräume. Zeigen Sie folgendes:

1. P ist Projektor auf W genau dann wenn Q Projektor entlang W ist.
2. Ist P Projektor auf W oder entlang V so ist $PP = P$.
3. Ist P Projektor auf W oder entlang V so ist die Matrix $H := I - 2P$ ist zu sich selbst Invers. Ist P ferner symmetrisch, so ist H orthogonal.
4. Ist P Projektor auf W, so ist P Projektor entlang $\mathrm{Kern}(P)$.
5. Ist P Projektor entlang V, so ist P Projektor auf $\mathrm{Bild}(P)$.

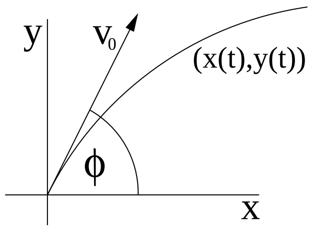
Zusatzaufgabe: **3+2 Punkte**

1. Sei $K \in (0, \frac{1}{3})$ und $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge mit
$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq K\|x_k - x_{k-1}\| \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$
Zeigen Sie, dass es dann ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ und ein $C \in (0, 1)$ gibt, so dass
$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C\|x_k - x^*\| \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$
2. Sei $K \in (\frac{1}{2}, 1)$. Man konstruiere eine Folge $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$, die
$$|x_{k+1} - x_k| \leq K|x_k - x_{k-1}| \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}$$
erfüllt, aber für kein x^*, $C \in (0, 1)$ und $M \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen
$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*| \qquad \text{für } k \geq M.$$
Hinweis: Konstruieren Sie für Teil 2 eine Folge, die einerseits gegen 0 konvergiert und andererseits für jedes $K \in \mathbb{N}$ ein $k_0 \geq K$ hat mit $x_{k_0} = 0$ und $x_{k_0+1} \neq 0$.

Programmieraufgabe: (Eine Art Schießverfahren) Abgabe bis zum 1.Dezember 2011

Feuer man ein Projektil im Vakuum mit einem Winkel $\phi \in [0, \pi]$ und mit Geschwindigkeit $v_0 \in [0, \infty)$ im Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Koordinatenursprung $x(0) = y(0) = 0$ ab, so lässt sich seine Position zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ ungefähr durch die Wurfparabel

$$
\begin{aligned}
x(t) &= tv_0 \cos(\phi), \\
y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + tv_0 \sin(\phi)
\end{aligned}
$$



beschrieben, wobei $g = 9.81$ ungefähr die Fallbeschleunigung auf der Erde ist. Es soll nun ein Ziel mit den Koordinaten $\hat{x} \in (0, \infty)$, $\hat{y} \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $T \in (0, \infty)$ getroffen werden.
Schreiben Sie dazu eine Funktion

```
function [phi, v_0] = berechne_projektil(xhat,yhat,T)
```

welche obiges Problem mit dem Newton-Verfahren löst. Verwenden Sie geeignete Startwerte und ein geeignetes Abbruchkriterium. Verwenden sie Ihre LR-Zerlegung aus der Programmieraufgabe von Blatt 2 zur Lösung des linearen Gleichungssystems.
Laden Sie dann das Zip-Archiv `newton.zip` von der Webseite des Kurses herrunter und führen Sie die enthaltene Datei `RUNME.m` im gleichen Verzeichnis aus. Die Datei muss fehlerfrei durchlaufen und eine Ausgabe produzieren, die in etwa wie in Abbildung 1 aussieht.

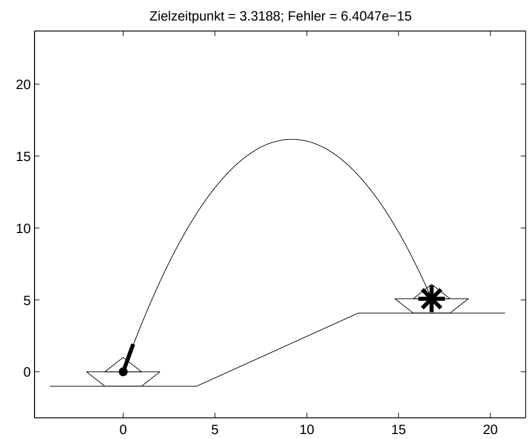


Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von RUNME.

Wenn Ihnen die graphische Ausgabe zu langsam ist, oder Sie mit *Octave* arbeiten, setzen Sie bitte die erste Variable in der Datei `RUNME.m` auf `false`.

Tutoriumsaufgaben: In der Woche 21.11. - 25.11.2011

Aufgabe 1:
Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine streng konvexe und streng monoton wachsende Funktion, d.h. es gelte $f''(x) > 0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, \infty)$. Außerdem besitze f eine (dann eindeutige) Nullstelle $x^* \in [a, \infty)$. Man zeige, dass das Newton-Verfahren dann für jeden Startwert $x_0 \in [a, \infty)$ gegen die eindeutige Nullstelle x^* konvergiert.

Aufgabe 2:
Führen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren aus um das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \exp(x^2 - y^2) - 3 &= 0 \\ x + y - \sin(2(x + y)) &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Benutzen Sie die Startwerte $x_0 = \pi$ und $y_0 = \pi$. An welchen Stellen ist das Differential singulär?

Aufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dreimal-stetig differenzierbare Funktion und es sei $x^* \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(x^*) = 0$ aber $f'(x^*) \neq 0$. Zeigen Sie, dass die durch

$$\begin{aligned} y &:= x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k) \\ x_{k+1} &:= y - f'(x_k)^{-1} f(y) \end{aligned}$$

definierte Folge mindestens mit Ordnung 3 gegen x^* konvergiert.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie folgendes: Es seien $W, V \subset \mathbb{R}^n$ Teilräume mit $W \oplus V = \mathbb{R}^n$. Ferner seien die Spalten der Matrix X eine Basis von W und die Spalten von Z eine Basis von $V^\perp$. Dann ist

$$P := X(Z^T X)^{-1} Z^T. \tag{1}$$

Projektor auf W entlang V. Die rechte Seite von (1) hängt nicht von der Wahl der Basen X und Z ab.

Aufgabe 5:
Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum und es seien die Spalten der Matrix X_0 eine Orthonormalbasis von W. Dann ist

$$P := X_0 X_0^T.$$

ein symmetrischer Orthogonalprojektor.

Aufgabe 6:
Geben Sie das Gram-Schmidt-Verfahren unter Benutzung von Projektoren an.