Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

6. Blatt: QR-Zerlegung und Ausgleichsprobleme

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 21. November 2011)

Aufgabe 1: **3+1 Punkte**

1. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$. Konstruieren Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, sodass $Qx = y$. Zeigen Sie auch, dass wirklich $Qx = y$ gilt.
2. Es sei $x \in \mathbb{R}^{1,n}$ ein Zeilenvektor. Zeigen Sie, dass es eine orthogonale Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ gibt, sodass xH ein vielfaches des Vektors $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ mittels Householder-Transformationen.

Tabelle 1: Datensatz

x_i	1	3	3	4	5	7
y_i	2	3	1	3	4	7

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Jemand sei der Meinung, dass die Daten aus Tabelle 1 durch die Funktion

$$g(x; a_1, a_2) = a_1 e^x + a_2 e^{-x} + 1$$

beschrieben werden. Stellen Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem auf, d.h. geben Sie eine Matrix M und einen Vektor b an, sodass man die optimalen Koeffizienten $a := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$ durch die Lösung von $\min_{a \in \mathbb{R}^2} \|Ma - b\|_2^2$ erhalten kann.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Jemand sei der Meinung, dass die Daten aus Tabelle 1 durch die Funktion

$$g(x; a, b, c) = a e^{bx + cx^2},$$

beschrieben werden. Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem an, welches im ersten Schritt des Gauß-Newton Verfahrens gelöst werden muss. Verwenden Sie die Startwerte $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = -1$.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Es seien folgende Messwerte (x_i, y_i, z_i) gegeben:

$$(1, 1, 3), \qquad (1, 3, 1), \qquad (3, 1, 3) \qquad (3, 3, 3).$$

Formulieren Sie ein lineares Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Ausgleichsebene

$$z = a + bx + cy.$$

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 8.Dezember 2011

Achtung: Diese Programmieraufgabe ist etwas umfangreicher als die vorhergehenden! Fangen Sie rechtzeitig damit an!

In dieser Programmieraufgabe soll die QR-Zerlegung mit Householder-Transformationen programmiert werden. Dabei soll die Matrix Q mit explizit gespeichert werden, sondern die Householdervektoren /Elementarreflektoren sollen in den frei werdenden Nullen unterhalb von R gespeichert werden. Außerdem soll diese QR-Zerlegung dann zum lösen von linearen Ausgleichsproblemen benutzt werden. Die gesamte Vorgehensweise ist detailiert in den Slides von Übung 6 erläutert. Bitte laden Sie auch das entsprechende Zip-Archiv von der Webseite des Kurses herunter.
Sie können die Datei `TEST.m` aufrufen um die Funktionstüchtigkeit der einzelnen Funktionen der Reihe nach überprüfen zu lassen. Gehen Sie beim Programmieren am besten in der Reihenfolge vor, wie sie hier angegeben ist und die sich auch der Reihenfolge in den Slides entspricht.

```
function [beta, v] = house(x)
function Y = h_anwenden(v, beta, X)
function [QR, betas] = qr_zerlegung(A)
function Y = q_anwenden(QR, betas, X, transponiert)
function [x, res] = ausgleichsproblem(A, b)
```

Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Dateien `TEST.m`, `RUNME.m` und `POLYFIT.m` fehlerfrei durchlaufen. `RUNME.m` und `POLYFIT.m` müssen außerdem einen Output ähnlich Abbildung 1 produzieren.

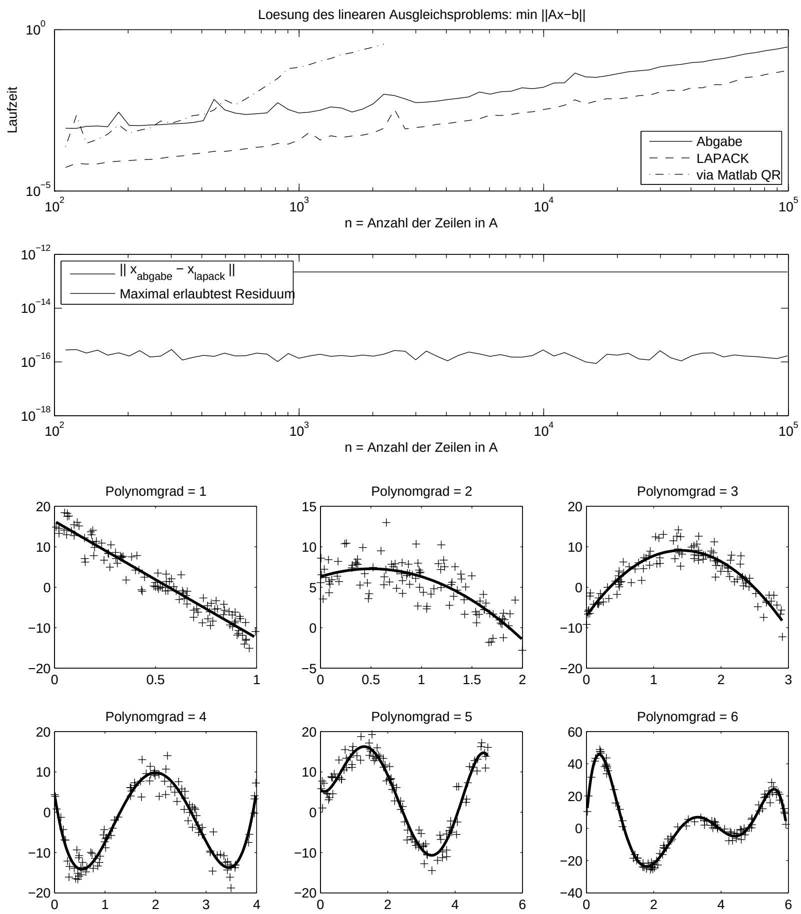

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von `RUNME.m` (oben) und `POLYFIT.m` (unten).

Tutoriumsaufgaben: Im Zeitraum 25.11. - 1.12.2011

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass man jede orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ als Produkt von Householdermatrizen schreiben kann.
Bemerkung: Dies zeigt insbesondere, dass man orthogonale Matrizen mit etwa $\frac{n^2}{2}$ anstatt n^2 Fließkommazahlen speichern könnte, indem man nur die Householdervektoren/Elementarreflektoren speichert.

Aufgabe 2:
Benutzen Sie eine Householder-Transformation um zu zeigen, dass für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\det\left(I + xy^T\right) = 1 + x^T y.$$

Aufgabe 3:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $n > m$ eine Matrix mit vollem Spaltenrang und $b \in \mathbb{R}^m$. Geben Sie einen Algorithmus an um das Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \qquad A^T x = b$$

zu lösen.
Hinweis: Verwenden Sie eine QR-Zerlegung von A.

Aufgabe 4:
Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie eine QR-Zerlegung von A und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2.$$

Aufgabe 5:
Jemand sei der Meinung, dass die Daten

x_i	1	2	3	5
y_i	110	103	91	70

durch die Funktion

$$g(x; a_1, a_2) = ae^{bx}$$

beschrieben werden.

1. Benutzen Sie den natürlichen Logarithmus um das Problem in ein ähnliches lineares Ausgleichsproblem umzuschreiben.

2. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem auf, welches im ersten Schritt des Gauß-Newton Verfahrens gelöst werden soll. Benutzen Sie die Startwerte $a_0 = 10$ und $b_0 = -1$.