Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

7. Blatt: Polynom-Interpolation

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 12. Dezember 2011)

Aufgabe 1: **3+1 Punkte**
Geben Sie das lineare Gleichungssystem an, welches man theoretisch lösen könnte, und die dividierten Differenzen c_k zu berechnen. D.h. zu den gegebenen Stützpunkten (x_i, f_i) mit $i = 0, \ldots, n$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ soll eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$ angegeben werden, sodass

$$Ac = f,$$

wobei $f = \begin{bmatrix} f_0 & \cdots & f_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Vektor der Funktionswerte und $c = \begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Vektor der dividierten Differenzen ist.
Zeigen Sie auch, dass A invertierbar ist.

Aufgabe 2: **3+1 Punkte**
Es seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, d.h. $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$. Zeige Sie, dass dann die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi_n \times \Pi_n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) Q(x_i)$$

Skalarprodukt auf Π_n definiert.
Geben Sie eine Orthonormalbasis an.

Aufgabe 3: **4+1 Punkte**
Berechnen Sie das eindeutige Polynom $p \in \Pi_4$ welches den Bedingungen

$$p(1) = 1, \qquad p'(1) = 3, \qquad p''(1) = -6, \qquad p(3) = -5, \qquad p'(3) = 7$$

genügt.
Werten Sie das Interpolationspolynom mit dem Horner-Schema am Punkt $x = 4$ aus (wie im 6. Kapitel des Skripts, Algorithmus 2, beschrieben).

Aufgabe 4: **2 Punkte**
Bestimmen Sie den interpolierenden kubischen Spline $s \in S_{\Delta,3}$ zu den folgenden Stützpunkten:

x_i	-2	-1	1
f_i	2	1	5

mit den vollständigen Randbedingungen $s'(-2) = -2$ und $s'(1) = 4$.
Hinweis: Hier soll nicht groß gerechnet werden. Nur das Ergebnis muss stimmen.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Bestimmen sie den Wert des Interpolationspolynoms $p \in \Pi_3$ durch die Stützpunkte

x_i	1	3	4	6
f_i	2	4	-4	-8

and der Stelle $x = 2$ mit dem Verfahren von Neville und Aitken.

Aufgabe 6: **1+2 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Bernstein-Polynome

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i,$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \ldots, n$ den Rekursionformeln

1.)

$$\begin{aligned} B_0^n(t) &= (1-t)B_0^{n-1}(t), \\ B_n^n(t) &= tB_{n-1}^{n-1}(t), und \end{aligned}$$

2.)

$$B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t), \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

genügen.

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 15.Dezember 2011

Es soll die kubische Spline-Interpolation mit natürlichen Randbedingungen programmiert werden. Dazu sollen zwei Funktionen

```
function spline = berechne_spline(x, f)
function yy = spline_auswerten(spline, xx)
```

geschrieben werden. Die erste Funktion `berechne_spline` soll mit den Stützstellen (x_k, f_k), welche in den Vektoren `x` und `f` gespeichert sind, Berechnungen ausführen und die Ergebnisse derart in der Struktur `spline` speichern, dass die Funktion `spline_auswerten` damit den natürlichen Spline an den Zwischenstellen, welche in Vektor `xx` gegeben sind, auswerten. Dabei sollen Sie davon ausgehen, dass die Vektoren `x` und `xx` stets aufsteigend sortiert sind.
Wenn Sie nach der Methodik, welche im Skript in den Abschnitten 6.8.3 und 6.8.4 beschrieben ist, vorgehen macht es Sinn die Koeffizienten a_k, b_k, c_k, d_k und die Stützstellen x_k als Spaltenvektoren in den Feldern der Struktur `spline` zu speichern:

`spline.a`, `spline.b`, `spline.c`, `spline.d`, `spline.x`

Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Datei `RUNME.m` und `DRAW2D.m` fehlerfrei laufen und einen Output ähnlich der Abbildung 1 produzieren.

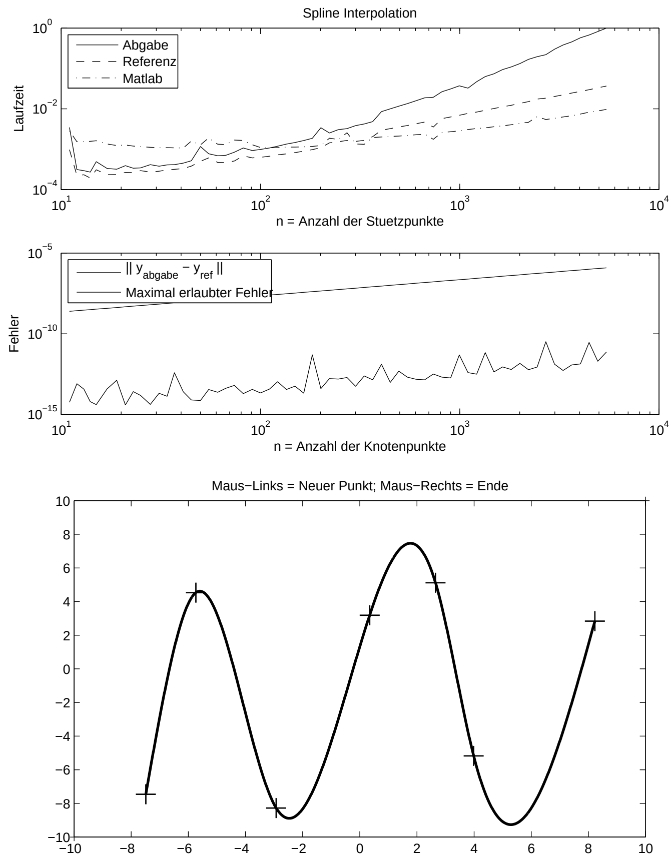

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von `RUNME.m`

Wenn Sie mit *Octave* arbeiten, wird die Zeit für die Referenzimplementation nicht angezeigt (vgl. Matlab Kommand `pcode`). Wenn ihnen die graphische Ausgabe von `SPLINEPLAY.m` zu langsam ist können Sie die Variable `animate` auf einen kleineren Wert oder `0` setzen.

Tutoriumsaufgaben: Im Zeitraum 2.12. - 8.12.2011

Aufgabe 1:
Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen

1.)

x_i	-3	-1	2
f_i	10	-6	15

2.)

x_i	-1	0	2
f_i	-3	4	6

einmal mit Hilfe der Lagrange-Basis Funktionen und einmal mit der Methode von Newton.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie Satz 6.14 aus der Vorlesungen, d.h. sinngemäß, dass für $x \in \mathbb{R}$ und für die dividierten Differenzen einer m mal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h, \ldots, x+mh] = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x).$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie das eindeutige Polynom $p \in \Pi_4$ welches die Bedingungen

1.) $p(1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p''(1) = 4, \quad p(3) = 5$

2.) $p(-1) = -3, \quad p(0) = 1, \quad p'(0) = -5, \quad p''(0) = 8, \quad p(2) = 15, \quad p'(2) = -1, \quad p''(2) = 4$

genügt.

Aufgabe 3:
Geben Sie eine Basis der linearen Splines an.

Aufgabe 4:
Es sei die Funktion $f(x) := x^3$ gegeben.

1. Bestimmen Sie den interpolierenden kubischen Spline zu den Stützstellen $\{-1, 0, 1\}$ mit natürlichen Randbedingungen.
2. Bestimmen Sie den interpolierenden kubischen Spline zu den Stützstellen $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ mit vollständigen Randbedingungen.

Aufgabe 5:
Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügend glatte Funktionen. Zeigen Sie, dass dann für die dividierten Differenzen des Produktes gilt

$$(gh)[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_i] \cdot h[x_i, \ldots, x_n],$$

wobei $g[x_0, \ldots, x_i]$ (und $h[x_i, \ldots, x_n]$) die dividierten Differenzen zu den entsprechenden Stützstellen von g (bzw. h) bezeichnen.

Aufgabe 6:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Bernstein-Polynome

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i,$$

für $i = 0, \ldots, n$ eine Basis des Π_n bilden.