Technische Universität Berlin
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Wintersemester 2011/2012

Numerische Mathematik 1

8. Blatt: Numerische Integration

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 2. Januar 2012)

Aufgabe 1: **1+2+3 Punkte**
Es seien $x_0, x_1, \ldots \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Stützstellen.

1. Zeigen Sie, dass die dividierte Differenz $f[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ der höchste Koeffizient des Interpolationspolynoms $\tilde{p} \in \Pi_k$ zu den Stützpunkten $(x_i, f(x_i)), \ldots, (x_{i+k}, f(x_{i+k}))$ ist (d.h. der Koeffizient zum Term x^k).
2. Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie, dass dann alle dividierten Differenzen der Form $p[x_i, \ldots, x_{i+k}]$ mit $k > n$ verschwinden (d.h. gleich Null sind).
3. Zeigen Sie, dass die dividierten Differenzen invariant unter Stützstellenpermutation sind, d.h. ist $j_0, \ldots, j_k$ eine Permutation der natürlichen Zahlen $\{i, \ldots, i+k\}$ so gilt

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = f[x_{j_0}, \ldots, x_{j_k}].$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**
Bestimmen sie die Parameter α, β, x so dass die Quadraturformel

$$Q_{-1}^{1}(f) \quad := \quad \beta f'(0) + \beta f(x) + \alpha f(-x) \qquad\qquad \text{auf dem Interval } [-1, 1]$$

mindestens den Exaktheitsgrad 2 hat.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $x \neq -\frac{1}{2}$. Die Werte für α und β können als Ausdruck in x angegeben werden, und müssen nicht ausgerechnet werden.

Aufgabe 3: **4 Punkte**
Es sei $f \in \mathcal{C}([a,b])$ und man setze $h := b - a$. Es bezeichne $\mathcal{T}_f(h)$ die Trapez-Regel angewendet auf f mit Intervallänge h (d.h. mit **einem** Teilintervall), $\mathcal{T}_f(\frac{h}{2})$ die summierte Trapez-Regel mit zwei Teilintervallen und $M(h)$ die Mittelpunktsregel zur Intervallänge h (d.h. mit einem Teilinterval). Zeigen Sie, dass gilt

$$T(\tfrac{h}{2}) = \tfrac{1}{2}(T(h) + M(h)).$$

Aufgabe 4: **3 Punkte**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Bestimmen Sie die absolute Kondition der Integration

$$I : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}, \qquad I(f) := \int_a^b f(x)dx,$$

bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.
Hinweis: Diese Aufgabe kann ähnlich zum ersten Satz aus Übung 8 gelöst werden.

Bitte wenden!!!

Aufgabe 5: **2+1+1+1+1 Punkte**

Es seien die Bernoulli-Polynome $B_k \in \Pi_k$ rekursiv durch $B_0(x) :\equiv 1$ und

$$B_{k+1}(x) := A_{k+1} + (k+1)\int_0^x B_k(t)dt \qquad \text{mit den Konstanten } A_{k+1} := -(k+1)\int_0^1 \left(\int_0^x B_k(t)dt\right)dx,$$

für $k \geq 0$ definiert. Dazu folgende Aufgaben:

1. Bestimmen Sie A_k für $k = 1, 2, 3$.
2. Zeigen Sie $B'_{k+1}(x) = (k+1)B_k(x)$ für alle $k \geq 0$.
3. Zeigen Sie $\int_0^1 B_k(t)dt = 0$ für alle $k \geq 1$.
4. Zeigen Sie $B_k(0) = B_k(1) = A_k$ für alle $k \geq 2$.
5. Zeigen Sie $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, $B_1(1) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6: **6+2 Punkte**

1. Man bestimme die Gauß-Quadratur-Formel mit zwei Stützstellen für das Interval $[-1, 1]$ und die Gewichtsfunktion $\omega(x) := 1 - x^2$.
2. Man benutze diese Quadratur-Formel um die Funktion $f(x) := e^x$ auf dem Interval $[-1, 1]$ zu integrieren.

Aufgabe 7: **1+2+2 Punkte**

Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. Für die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt
$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } \tfrac{x_i + x_{n-i}}{2} = c \text{ für alle } i = 0, \ldots, n,$$
(d.h. die Stützstellen sind symmetrisch zum Punkt c), genau dann wenn
$$x_i = x_n + x_0 - x_{n-i} \text{ für alle } i = 0, \ldots, n.$$
2. Es erfüllen die Stützstellen $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Bedingungen $x_i = x_n + x_0 - x_{n-i}$ für $i = 0, \ldots, n$. Ferner seien $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ und es sei
$$\begin{aligned} &p \in \Pi_n && \text{das eindeutige Interpolationspolynom durch } (x_i, f_i), \text{ für } i = 0, \ldots, n \text{ und} \\ &\tilde{p} \in \Pi_n && \text{das eindeutige Interpolationspolynom durch } (x_i, f_{n-i}), \text{ für } i = 0, \ldots, n. \end{aligned}$$
Dann gilt $p(x) = \tilde{p}(x_n + x_0 - x)$, d.h. wenn man p am Punkt $\frac{x_0 + x_n}{2}$ spiegelt kommt $\tilde{p}$ raus.
3. Sei $f \in \mathcal{C}([a, b])$ und seien $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \ldots, n$ äquidistante Stützstellen. Es bezeichne
$$N^n_{[a,b]}(f) = \sum_{j=0}^{n} \sigma_j f(x_j) \left(\approx \int_a^b f(x)dx\right)$$
die n-te Newton-Cotes Formel, d.h. σ_j seien die Newton-Cotes Gewichte. Dann gilt $\sigma_i = \sigma_{n-i}$.

Aufgabe 8: **3+3 Punkte**

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b])$ und es bezeichne $c := \frac{b+a}{2}$ den Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$.

1. Geben Sie das Interpolationspolynom $p \in \Pi_2$ durch die äquidistanten Stützstellen a, c, b, d.h. durch die Stützpunkte
$$(a, f(a)), (c, f(c)), (b, f(b)),$$
an.
2. Berechnen Sie $\int_a^b p(x)dx$. Was ist dies für ein Ausdruck.

Hinweis: Benutzen Sie für 2.), dass

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}(x-a)^2(x-c) - \tfrac{1}{6}(x-a)^3\right) = (x-a)(x-c).$$

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 6. Januar 2012

Programmieren Sie das Romberg Verfahren,

```
function INT = int_romberg(a, b, func, max_eval)
```

welches das Integral einer Funktion auf dem Interval $[\mathtt{a}, \mathtt{b}]$ mit maximal `max_eval` Funktionsauswertungen approximiert. Die Funktion ist durch den Parameter `func` spezifiziert. Der Parameter `func` enthält dabei nur einen String. Um die entsprechende Funktion an einer Stelle $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$ auszuwerten und das Ergebnis in $\mathtt{y} \in \mathbb{R}$ zu speichern kann der Matlab-Befehl

$$\mathtt{y = feval(func, x)} \tag{1}$$

benutzt werden. Der Befehl (1) darf höchstens `max_eval` mal in der Funktion `int_romberg` benutzt werden, sonst bricht die `RUNME.m` mit einem Fehler ab.
Für die Abnahme ist es erforderlich, dass die Datei `RUNME.m` eine Folge von Outputs produziert, die ähnlich wie in Abbildung 1 aussehen. Die gestrichelten Linien stellen die Referenz-Integration (stückweise Newton-Cotes Formeln) dar.

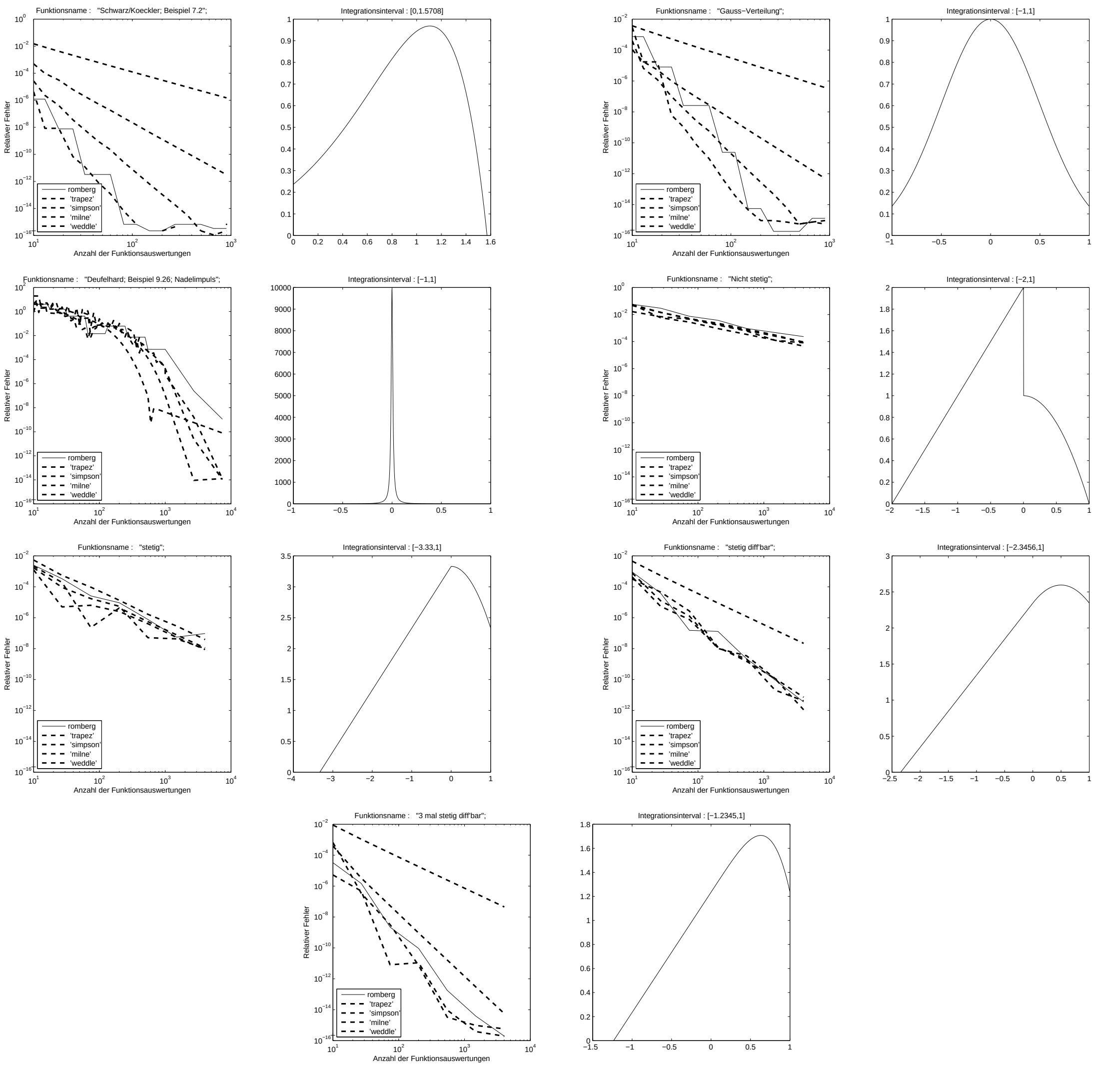

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgabe von `RUNME.m`

Tutoriumsaufgaben: Im Zeitraum 9.12. - 15.12.2011

Aufgabe 1:
Bestimmen sie die Parameter α, β und x, y so dass die Quadraturformeln

$$\begin{array}{rrcll} 1.) & Q_0^1(f) & := & \alpha f(0) + \beta f'(y) & \text{auf dem Interval } [0,1] \\ 2.) & Q_{-1}^1(f) & := & \alpha(f(x) + f(-x)) + \beta f'(y) & \text{auf dem Interval } [-1,1] \end{array}$$

möglichst hohen Exaktheitsgrad haben. Bestimmen sie den maxiamelen Exaktheitsgrad.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass man die Simpson-Regel erhält, wenn man das Romberg-Verfahren mit den Schrittweiten $h_0 = b - a$ und $h_1 = \frac{b-a}{2}$ benutzt.

Aufgabe 3:

1. Man bestimme die Gauß-Quadratur-Formel mit zwei Stützstellen für das Interval $[-1, 1]$ und die Gewichtsfunktion $\omega(x) := x^2$.
2. Man benutze diese Quadratur-Formel um die Funktion $f(x) := e^x$ auf dem Interval $[-1, 1]$ zu integrieren.