Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1

9. Blatt: Numerische Integration

Hausaufgaben: (Abgabetermin vor der Vorlesung am 9. Januar 2012)

Aufgabe 1: **4+3 Punkte**

Das n-Körper-Problem im $\mathbb{R}^d$ wird durch die Gleichungen

$$m_i \ddot{q}_i(t) = G \sum_{k \neq i} m_i m_k \frac{q_k(t) - q_i(t)}{\|q_k(t) - q_i(t)\|^3} \tag{1}$$

beschrieben, wobei $G, m_1, \ldots, m_n > 0$ Skalare und $q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind.

1. Zeigen Sie, dass sich die Energie

$$E(t) := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \|\dot{q}_i(t)\|^2 - \sum_{i=1}^{n} G \sum_{k \neq i} m_i m_k \frac{1}{\|q_k(t) - q_i(t)\|} \right)$$

   im n-Körper-Problem nicht mit der Zeit ändert.

2. Zeigen Sie, dass sich der Massen-Schwerpunkt

$$B(t) = \frac{1}{m_1 + \ldots + m_n} \sum_{i=1}^{n} m_i q_i(t)$$

   im n-Körper Problem stets mit gleicher Geschwindigkeit bewegt.

Hinweis: Zeigen Sie (unter Benutzung von (1)), dass in 1.) die erste Ableitung verschwindet und in 2.) die zweite Ableitung verschwindet. Benutzen Sie für 1.) auch, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i} \cdots = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \neq k} \cdots,$$

und in 2.) eine ähnliche Regel.
In beiden Aufgabenteilen können Sie auch annehmen, dass $n = 1$, wenn Sie dafür einen Punktabzug von 1 Punkt in Kauf nehmen.

Aufgabe 2: **2+3+1+3 Punkte**

Man betrachte das Zwei-Körper Problem in der Ebene, d.h. das System (1) für den Spezialfall $n = 2$ und $d = 2$. Ferner sei zur Vereinfachung der Notation $G = 1$, $m_1 = 1$ und $m_2 = 2$.

1. Reduzieren Sie das Problem auf ein System erster Ordnung indem Sie die Ableitungen der Positionen mit $v_i := \dot{q}_i$ bezeichnen. Benutzen Sie den Zustandsvektor $y = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T$ und geben Sie die rechte Seite $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$, welche das gegebene Zwei-Körperproblem mittels $y'(t) = f(y(t))$ beschreibt, explizit an.

Bitte wenden!!!

2. Benutzen Sie die Notation $r := \|q_1 - q_2\|$, $q_{12} := \frac{1}{r}(q_1 - q_2)$, $q_{21} := \frac{1}{r}(q_2 - q_1)$ und

$$M := I - 3q_{12}q_{12}^T = I - 3q_{21}q_{21}^T$$

um damit das Differential der Funktion f anzugeben.

Hinweis: Das Differential einer Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Form $g(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$ ist durch

$$Dg(x) = \frac{1}{\|x\|^3}\left(I - 3\frac{x}{\|x\|}\frac{x^T}{\|x\|}\right)$$

gegeben.

3. Schreiben Sie die nicht-lineare Gleichung, die im ersten Schritt des impliziten Euler-Verfahrens

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f(y_1)$$

zu lösen ist als Nullstellen-Problem

$$F(z) = 0 \tag{2}$$

auf, wobei $F : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$. Die Lösung z^* des Nullstellenproblems (2) soll dabei die nächste Iterierte sein, d.h. $z^* = y_1$. Geben Sie die Ableitung von F an.

4. Führen Sie einen Schritt mit dem Newton-Verfahren aus um (2) zu lösen. Benutzen Sie die Schrittweite $h = 8$, als Anfangswert

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ -\frac{2}{8} \end{bmatrix} \text{ und als Startwert für das Newton-Verfahren } z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{8} \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Hinweis: In Teil 4.) kommen angenehme Zahlen raus, d.h. natürliche Zahlen oder einfache Brüche aus natürlichen Zahlen. Außerdem genügt es in Teil 4.) das zu lösende Gleichungssystem hinzuschreiben. Die Lösung muß nicht ausgerechnet werden.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ soll numerisch integriert werden, d.h. es soll der Wert $\int_a^b g(t)dt$ approximiert werden. Formulieren Sie das Problem als Anfangswertproblem und wenden Sie das klassische Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung an. Was für eine Regel ergibt sich?

Hinweis: Vergleiche Tutoriumsaufgabe 4.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Es sei $(\lambda_0, v_0) \in \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}^n$ ein reelles Eigenpaar der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$x(t) := e^{\lambda_0 t} v_0$$

die **eindeutige** Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = v_0 \end{cases}$$

ist.

Programmieraufgabe: Abgabe bis zum 13. Januar 2012

Programmieren Sie das mehrstufige explizite Runge-Kutta-Verfahren

```
function y_end = int_rungekutta(method, func, diff, time_steps, y0)
```

welches das durch `method` (siehe dazu die Datei `int_rungekutta.m` im Zip-Archiv) spezifizierte Runge-Kutta-Verfahren benutzt, um das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = \mathtt{y0} \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

zu lösen. Dabei ist die Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch

```
f = feval(func, t, y)
```

auszuwerten, wobei `t` ein Skalar und $\mathtt{y}, \mathtt{f} \in \mathbb{R}^N$ Vektoren sind. Analog kann man durch den Übergabewert `diff` die Ableitung von f auswerten, was jedoch in dieser Programmieraufgabe nicht nötig ist (d.h. der Parameter `diff` ist eigentlich überflüssig; er wird nur bei impliziten Verfahren benötigt). Die $m-1$ Elemente des Zeilenvektors

$$\mathtt{time\_steps} = \begin{bmatrix} t_0 & \dots & t_m \end{bmatrix}$$

geben das Gitter an, bezüglich welchen das Runge-Kutta-Verfahren ausgeführt werden soll. Der Rückgabewert $\mathtt{y\_end} \in \mathbb{R}^{N,m+1}$ soll am Ende in der i-ten Spalte die berechnete Approximation zum Zeitpunkt t_i enthalten.

Testen Sie Ihr Program indem sie der Reihe nach die Befehle

```
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_1.mat')
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_2.mat')
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_3.mat')
>> N_BODY_PROBLEM('nbp_sonne_erde_mond.mat')
```

aus der Matlab Konsole ausführen.

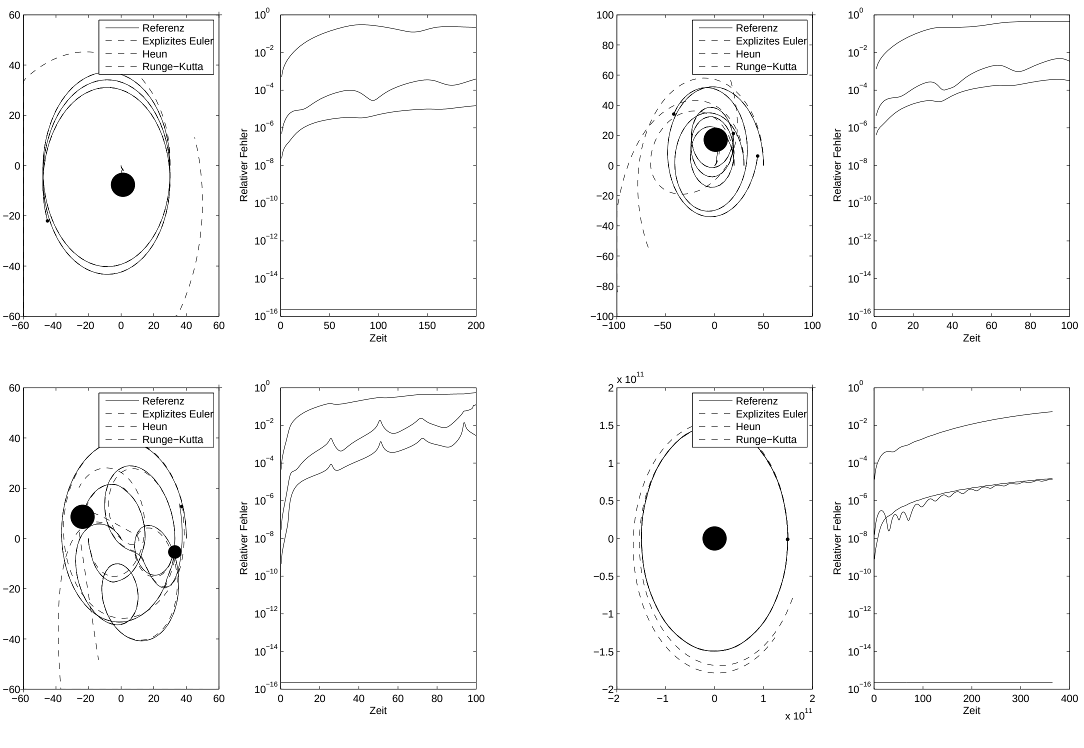

Abbildung 1: Erfolgreiche Ausgaben von `N_BODY_PROBLEM.m`

Tutoriumsaufgaben: Im Zeitraum 15.12. - 5.1.2012

Aufgabe 1:
Es seien folgende Differentialgleichungen gegeben:

1. $$\begin{cases} M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = b(t) \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0 \end{cases},$$
   wobei $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar ist, $D, K \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion sei.

2. $$\begin{cases} x'''(t) + \sin(t)x''(t) + \cos(t)x(t) = b(t) \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0, \qquad x''(0) = a_0 \end{cases},$$
   wobei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion sei.

Dazu jeweils folgende Aufgaben:

a) Reduzieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung.

b) Zeigen Sie, dass das entsprechende (reduzierte) Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat.

c) Führen Sie einen Schritt mit dem expliziten Euler-Verfahren durch. Wie lautet die Nährung an $x(h)$.

d) Überlegen Sie sich, was bei einem Schritt mit dem impliziten Euler-Verfahren zu tun wäre.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung des skalaren Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) & = \lambda x(t) + b(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases},$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(x_0 + \int_0^t e^{-\lambda\tau} b(\tau)d\tau\right) = e^{\lambda t}x_0 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}b(\tau)d\tau$$

gegeben ist.

Aufgabe 3:
Es sei $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$ fest vorgegeben und man betrachte die sog. *Testgleichung*

$$\begin{cases} x'(t) & = \lambda x(t) \\ x(0) & = 1 \end{cases}.$$

Nach Aufgabe 2 ist $x(t) = e^{\lambda t}$ die exakte Lösung; sie konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0 und ist stets positiv. Es sei nun $h > 0$ eine Schrittweite mit $1 - h\lambda \neq 0$. Man wende nun einmal das explizite und einmal das implizite Euler-Verfahren auf äquidistantem Gitter

$$t_i := i \cdot h, \text{ für } i = 0, 1, \ldots$$

an um die Testgleichung zu Approximieren. Für welche Schrittweiten h gilt folgendes:

i) Die Folge der Lösungsapproximationen konvergiert gegen 0?

ii) Die Folge der Lösungsapproximationen ist positiv?

Aufgabe 4:
Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ soll numerisch integriert werden, d.h. es soll der Wert $\int_a^b g(t)dt$ approximiert werden. Formulieren Sie das Problem als Anfangswertproblem und wenden Sie einmal das explizite und einmal das implizite Euler-Verfahren zur Lösung an.