Technische Universität Berlin **Wintersemester 2011/2012**
Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Numerische Mathematik 1
Wiederholungsblatt

Die folgenden Aufgaben sind alle solcherart, wie sie auch in der Klausur dran kommen können. Allerdings ist der Umfang aller Aufgaben zusammen zu viel für eine Klausur von 100 min. Eine mögliche Klausur könnte z.B. aus den Aufgaben 1, 3, 7, 8, 10, 12, 14 bestehen.

Aufgabe 1:

1. Man unterziehe den Ausdruck
$$\frac{(1-x)-1}{x}, \tag{1}$$
für $0 \neq x$ einer Fehleranalyse. Wird dieser Ausdruck gut funktionieren auf einer Maschine für betragsmäßig kleine/große $x \in \mathbb{R}$.
2. Man Werte den Ausdruck (1) für die Zahl -0.018 aus; auf einer Maschine die mit den normalisierten Gleitpunktzahlen $F(10, 3, -\infty, \infty)$ rechnet.
3. Geben Sie einen zu (1) mathematisch äquivalenten Ausruck an, der besser für die Berechnung auf der Maschine geeignet ist und unterziehen Sie auch diesen Ausdruck einer Fehleranalyse.

Aufgabe 2:
Was ist die absolute und relative Kondition des Verfahrens, welches durch die Funktion $f : \mathbb{R}_* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(a, b) = \frac{b}{a}$ beschrieben ist bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm. Vereinfachen Sie die *relative* Kondition so weit wie möglich.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie eine Cholesky-Zerlegung der Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -6 & 0 \\ 9 & 18 & -6 & -12 \\ -6 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & -12 & -3 & 34 \end{bmatrix}$$
Hinweis: Der Cholesky-Faktor besteht nur aus ganzen Zahlen.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie eine Singulärwert-Zerlegung der Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 5:

1. Geben Sie die Iterationsmatrix an, die man erhält wenn man das Einzelschritt-Verfahren auf die Matrix
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
anwendet.
2. Konvergiert das Einzelschritt-Verfahren für jeden Startwert x_0?

Aufgabe 6:
Man gebe die Orthogonal-Projektoren auf und entlang dem Unterraum

$$V := \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right)$$

als Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{3,3}$ explizit an.

Aufgabe 7:
Die Daten

Tabelle 1: Datensatz

i	1	2	3	4
x_i	1	$\sqrt{\pi}$	exp(3)	-120
y_i	2	1	5	2

sollen durch eine konstante Funktion

$$f(x; a) := a$$

möglichst gut (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) beschrieben werden, d.h. es soll gelten $y_i \approx f(x_i; a)$. Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem an (d.h. die Funktion, die minimiert werden soll) und lösen Sie es mithilfe einer QR-Zerlegung.

Aufgabe 8:
Es seien $\phi_0, \dots, \phi_n : C[a, b] \to \mathbb{R}$ lineare Funktionen auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $C[a, b]$ und es sei $\mathcal{V} \subset C[a, b]$ ein $(n + 1)$-dimensionaler linearer Teilraum.
Zeigen Sie, dass die verallgemeinerte Interpolationsaufgabe

$$\text{bestimme } v \in \mathcal{V} \text{ mit } \phi_j(v) = \phi_j(f) \text{ für } j = 0, 1, \dots, n$$

genau dann für jedes $f \in C[a, b]$ eindeutig lösbar ist, wenn die Funktion $f = 0$ nur $v = 0$ als verallgemeinerte Interpolierende hat.
Hinweis: Führen Sie die Funktion

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Phi(v) := \begin{bmatrix}\phi_0(v)\\ \vdots \\ \phi_n(v)\end{bmatrix},$$

ein und benutzen Sie grundlegende Sätze aus der linearen Algebra.

Aufgabe 9:
Geben Sie das eindeutige Interpolationspolynom $p \in \Pi_5$ vom Grad ≤ 5 an, welches die Funktion

$$f(x) := \cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)$$

in den Punkten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ interpoliert und die zusätzliche Bedingung $f'(x_0) = p'(x_0)$ erfüllt.

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass die Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha f(x_1) + \alpha f(x_2),$$

möglichst hohen Exaktheitsgrad hat. Was ist der Exaktheitsgrad? Handelt es sich bei dem Ergebnis um eine Newton-Cotes-Quadratur Regel? Handelt es sich um eine Gauß-Quadratur Regel?

Aufgabe 11:
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx \tag{2}$$

mittels der summierten Trapez-Regel mit `n` Teilintervallen approximiert. D.h. es soll eine Funktion

```
function I = compute_integral(n)
```

geschrieben werden, die die Anzahl der Teilintervalle `n` übergeben bekommt und die entsprechende Approximation `I` an (2) zurückgibt.

Aufgabe 12:
Geben Sie alle Runge-Kutta-Verfahren der Form

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ b_2 & a_2 & & & & \\ b_3 & 0 & a_3 & & & \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 & & \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & a_5 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

an, die mindestens die Konsistenzordnung 2 haben.

Aufgabe 13:
Das Verfahren von Heun ist gegeben durch die folgende Butcher-Tabelle:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Liegt der Punkt $\mu = -1$ im Bereich der absoluten Stabilität des Verfahrens von Heun? Der Lösungsweg ist mit anzugeben!

Aufgabe 14:
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ und $B \in \mathbb{R}^{k,\ell}$ übergeben bekommt, und damit die Matrix

$$C := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+k,m+\ell}$$

zurückgibt.

Aufgabe 15:
Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, welche zwei Skalare $n, m \in \mathbb{N}$ übergeben bekommt, und damit die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m \cdot n - n + 1 & m \cdot n - n + 2 & \cdots & m \cdot n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

zurückgibt.
Hinweis: Die beiden letzten MATLAB-Aufgaben sind aus den MATLAB Test-Klausuren von Jürgen Dietel, RWTH Aachen
`http://www.rz.rwth-aachen.de/global/show_document.asp?id=aaaaaaaaaabubzh`