Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Wintersemester 2011/2012

1. Februar 2012

Modulklausur: Numerische Mathematik I

Persönliche Angaben:

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr. und Punktzahl) im Internet bin ich einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift: ______________________________

Für diese Klausur ist **ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** als Hilfsmittel erlaubt. Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**. Bitte für jede neue Aufgabe ein eigenes Blatt anfangen. Die einzelnen Bätter sollen jeweils mit **Namen und Matrikelnummer beschriftet** werden. Es gibt insgesamt 40 Punkte und die Klausur gilt als bestanden, wenn insgesamt mindestens **20 Punkte** erreicht sind.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ	Note
Punkte														
Korr.														

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Werten Sie das Polynom

$$6x^2 + 2x + 1$$

mit dem Horner-Schema auf einer Maschine mit $F(10, 1, -\infty, \infty)$ an der Stelle $x_0 = 0.1$ aus.

Aufgabe 2 **5 Punkte**

Es seien

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung von A **ohne** Pivotisierung und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Hinweis: Die Faktoren L und R *müssen* nicht als separate Matrizen angegeben werden; es reicht, die Darstellung in *einer* Matrix.

Aufgabe 3 **2 Punkte**

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der die Determinate einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (welche nicht notwendig invertierbar ist) in $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen berechnet.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe kann auf einen Algorithmus aus der Vorlesung zurückgegriffen werden. Es soll nur die Idee kurz zum Ausdruck gebracht und nicht der gesamte Algorithmus bis in alle Einzelheiten beschrieben werden.

Aufgabe 4 **3 Punkte**

Geben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur

```
function y = multiply_Q(x)
```

an, welche das Produkt von einem beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit der Matrix

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

in $\mathcal{O}(n)$ Operationen berechnet. Das Ergebnis soll als $y = Qx \in \mathbb{R}^n$ zurückgegeben werden.

Aufgabe 5 **2+2 Punkte**

Es sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben. Dazu folgende Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.
2. Bestimmen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm.

Hinweis: Für 2.) könnte man die Singulärwerte von A benutzen.

Aufgabe 6 **2 Punkte**

Geben Sie das eindeutige Polynom $p \in \Pi_7$ an, welches den folgenden Bedingungen genügt:

$$p(1) = 0, \quad p(2) = 0, \quad p(3) = 0, \quad p(4) = 0, \quad p(5) = 0, \quad p(6) = 1, \quad p(7) = 0, \quad p(8) = 0.$$

Hinweis: Der Ausdruck muss in keinster Weise vereinfacht werden.

Aufgabe 7 **3 Punkte**

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur

```
function diffs = colwise_norm(sol_comp, sol_ref)
```

die zwei Matrizen `sol_comp`, `sol_ref` $\in \mathbb{R}^{n \times K}$ übergeben bekommt, und die einen K-dimensionalen Zeilenvektor `diffs` $\in \mathbb{R}^{1 \times K}$ zurückgibt, welcher in der i-ten Komponente den Abstand (gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm) derjenigen Vektoren enthält, welche sich in der i-ten Spalte von `sol_comp` und `sol_ref` befinden.

Aufgabe 8 **4 Punkte**

Der Datensatz

x_i	1	2	4	5	
y_i	0	2	13	21	

soll möglichst gut (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) durch die Funktion

$$y = g(x; a, b) = (x - a)(x - b)$$

beschrieben werden. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem auf, welches sich ergibt, wenn man das Problem mit dem Gauß-Newton-Verfahren lösen will und dabei den Startwert $(a_0, b_0) = (0, 5)$ benutzt.

Hinweis: Es treten nur ganze Zahlen auf.

Aufgabe 9 **7+2 Punkte**

Ein sogenanntes *symplektisches* Einschrittverfahren ist durch folgende Butcher-Tabelle gegeben:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Dazu folgende Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens (mit Beweis)!
2. Bestimmen Sie den Bereich der absoluten Stabilität B für dieses Verfahren (mit Herleitung) und stellen Sie B graphisch dar!

Aufgabe 10 **2 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, $b \in \mathbb{R}^n$ und damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Ferner sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit

$$\rho(I - PA) < 1,$$

wobei $\rho(\cdot)$ den Spektralradius meint, d.h. den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts. Zeigen Sie, dass dann die sogenannte Nachiteration

$$x_{k+1} = x_k + Pr_k,$$

wobei $r_k := b - Ax_k$ das Residuum bezeichnet, für beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ linear gegen die exakte Lösung $x^* := A^{-1}b$ konvergiert.

Hinweis: Es kann ein Satz aus der Vorlesung benutzt werden.

Aufgabe 11 **3 Punkte**

Es sei $\omega : [-1, 1] \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Gewichtsfunktion, die als stetig und streng monoton wachsend angenommen ist. Zu dieser Gewichtsfunktion ω auf dem Interval $[-1, 1]$ betrachte man die Gauß-Quadratur-Formel mit **einem** Stützpunkt x_1. Zeigen Sie, dass dann gilt $x_1 > 0$.

Zusatzaufgabe 12 **+ 1 Punkt**

Lösen Sie das in Aufgabe 8 auftretende lineare Ausgleichsproblem mit einer Methode ihrer Wahl.

Hinweis: Es treten nicht so schöne Zahlen auf.
