Technische Universität Berlin
Fakultät II; Institut für Mathematik
Günter Bärwolff, Tobias Brüll

Wintersemester 2010/2011

1. Februar 2010

Modulklausur: Numerische Mathematik I

Persönliche Angaben:

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Studiengang: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr. und Punktzahl) im Internet bin ich einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift: ....

Für diese Klausur ist **ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** als Hilfsmittel erlaubt. Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**. Bitte für jede neue Aufgabe ein eigenes Blatt angefangen. Die einzelnen Bätter sollen jeweils mit **Namen und Matrikelnummer beschriftet** werden. Es gibt insgesamt 40 Punkte und die Klausur gilt als bestanden, wenn insgesamt mindestens **20 Punkte** erreicht sind.

Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	Summe	Note
Punkte												
Korrektor												

Aufgabe 1 **1+3 Punkte**

1. Formen Sie den folgenden Ausdruck um, so dass für $x \approx 0$ keine Auslöschung auftritt:
$$\tfrac{1}{x+1} - (x+1).$$
2. Unterziehen Sie den folgenden Ausdruck einer Fehleranalyse:
$$\tfrac{1}{y} - y.$$

Aufgabe 2 **1+4 Punkte**

1. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur
```
function is_sym = check_sym(A)
```
welche prüft ob die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch ist. Es soll eine der MATLAB Konstanten `true` oder `false` zurückgegeben werden.
2. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion mit der Signatur
```
function L = chol_2by2(A)
```
die die Cholesky-Zerlegung einer symmetrischen positiv definiten 2-mal-2 Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ berechnet. Wenn die Matrix nicht 2-mal-2, symmetrisch oder positiv definit ist soll $L = 0$ zurückgegeben werden. Benutzen Sie die Funktion aus 1. um die Symmetrie zu überprüfen.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$, so dass die Quadraturformel
$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \alpha f(-1) + \beta f(-x) + \beta f(x) + \alpha f(1)$$
möglichst hohen Exaktheitsgrad hat.

Hinweis: Der genaue Exaktheitsgrad muss nicht bestimmt werden. Es treten Ausdrücke auf, die nicht so schön sind.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert zum Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Wie im Skript bezeichne $r_A(x) := \frac{x^TAx}{x^Tx}$ den *Rayleight-Quotienten* von $x \neq 0$ bzgl. A.

Zeigen Sie, dass dann die Abschätzung
$$\|r_A(x) - \lambda\| \leq 2\|A\| \frac{\|x - v\|}{\|x\|}$$
für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit $\|x\| = \|v\|$ gilt, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

Aufgabe 5 **2+2 Punkte**

1. Man gebe eine explizite Formel für das eindeutige Interpolationspolynom $p \in \Pi_3$ an, welches die Interpolationsbedingungen

$$p(0) = 0, \qquad \dot{p}(0) = 1, \quad \ddot{p}(0) = p_1 \qquad p(1) = p_2 + 1,$$

erfüllt (z.B. mit Hermite Interpolation).

2. Man berechne die absolute Kondition des Verfahrens welches durch $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(p_1, p_2) = p(2),$$

gegeben ist, wobei p eben das Polynom aus 1. ist. Es soll die euklidische Norm verwendet werden.

Aufgabe 6 **5 Punkte**

Es seien

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 20 \\ 24 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{und } x_0 := \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Führen Sie einen Schritt mit dem Jacobi-Verfahren (=Gesamtschrittverfahren) und Startwert x_0 aus um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Konvergiert das Verfahren? Warum?

Aufgabe 7 **4+2 Punkte**

Der Datensatz

x_i	0	1	2
y_i	$\frac{1}{2e}$	1	$\frac{2}{e}$

soll möglichst gut (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) durch die Funktion

$$y = g(x; a) = e^{-(x-a)^2}$$

beschrieben werden.

1. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem auf, welches sich ergibt, wenn man das Problem mit dem Gauß-Newton-Verfahren lösen will und dabei den Startwert $a_0 = 1$ benutzt.

2. Bestimmen Sie dann die Lösung des linearisierten Problems mit einem Verfahren Ihrer Wahl. Dabei empfiehlt es sich der Einfachheit halber das Problem vorher so zu skalieren, dass nur einfache Zahlen vorkommen.

Aufgabe 8 **2 Punkte**

Es sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, welche die Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) = f\left(t, y(t), \dot{y}(t)\right)$$

löst, wobei f stetig differenzierbar sei. Geben Sie die dritte Ableitung von y unter Benutzung der Kettenregel an, d.h. geben Sie $y^{(3)}$ an, unter Benutzung der Funktion f und ihrer Ableitungen, y, und $\dot{y}$, ohne aber höhere Ableitungen von y zu benutzen.

Aufgabe 9 **5 Punkte**

Gesucht sei eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$0 \quad = \quad \frac{d}{dt}\left(a(t)\frac{d}{dt}y(t)\right), \tag{1}$$

wobei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $a(t) := \exp\left(-t^2\right)$ gegeben ist.

1. Formulieren Sie das Problem als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und führen Sie dann einen Schritt mit dem modifizierten Euler Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

durch. Dabei sollen die Schrittweite $h = 1$ und die Anfangswerte $y(0) = 1$ und $\dot{y}(0) = 1$ benutzt werden.

Zusatzaufgabe **3 Punkte**

2. Um eine Lösung von (1), welche den Rangbedingungen $y(0) = 0$, $y(10) = 3$ genügt, zu bestimmen soll das Schiessverfahren verwendet werden. Es bezeichne dazu $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diejenige Funktion, welche jedem Zeitpunkt $t \in [0, 10]$ und jeder Startgeschwindigkeit $v_0 \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung y von (1) mit Anfangswerten

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= v_0 \end{aligned}$$

zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ zuordnet, d.h. es sei dann

$$Y(t, v_0) = y(t).$$

Ferner bezeichne $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die partielle Ableitung von Y nach v_0, d.h.

$$\Psi(t, v_0) := \frac{\partial}{\partial v_0}Y(t, v_0).$$

Geben Sie das entsprechende Newtonverfahren formal an und die Anfangswertprobleme, die in einem Schritt des Newtonverfahrens zu lösen sind.

Hinweis: Teil 1. spielt hier keine Rolle mehr.
