Musterlösung zur Nachklausur

Aufgabe 1:

1.)

$$\frac{1}{x+1} - (x+1) = \frac{1-(x+1)^2}{x+1} = -\frac{x^2+2x}{x+1}$$

2.) $$(1 \oslash y) \ominus y = \left(\frac{1}{y}(1+\varepsilon_1) - y\right)(1+\varepsilon_2)$$

$$= \frac{1}{y}(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) - y(1+\varepsilon_2) =: f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow Df = \left[\frac{1}{y}(1+\varepsilon_2)\ ,\ \frac{1}{y}(1+\varepsilon_1) - y\right]$$

$$\Rightarrow Df|_0 = \left[\frac{1}{y}\ ,\ \frac{1}{y} - y\right]$$

$$\Rightarrow \|Df|_0\|_\infty = \left|\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y} - y\right|$$

Aufgabe 2:

1.)
```
function is_sym = check_sym(A)
    is_sym = (norm(A-A') == 0.0);
end
```

2.) Wegen $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & 0 \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}$$

ist die gesuchte Funktion

```
function L = chol_2by2(A)
  if ( size(A) != [2,2]
  if (norm (size (A) != [2,2]))
      L = 0;
      return;
  end
  if ( ! check_sym(A))
      L = 0
      return;
  end
  if ( A(1,1) < 0.0)
     L = 0;
     return;
  end
  L = zeros(2,2);
  L(1,1) = sqrt(A(1,1));
  L(2,1) = A(1,2) / L(1,1);
  if ( (A(2,2) - L(2,1)^2 ) < 0.0)
      L = 0; return;
  end
  L(2,2) = sqrt( A(2,2) - L(2,1)^2);
end
```

Aufgabe 3:

Grad 0:

$$2 = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \boxed{\alpha = 1-\beta}$$

Grad 1:

$$0 = -\alpha - \beta x + \beta x + \alpha \quad \checkmark$$

Grad 2:

$$\frac{2}{3} = \alpha + \beta x^2 + \beta x^2 + \alpha$$

$$= 2\alpha + 2\beta x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = 1-\beta + \cancel{2}\beta x^2$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} + \beta = \beta x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{2}{3\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{1-\frac{2}{3\beta}}}$$

Grad 3:

$$0 = -\alpha - \beta x^3 + \beta x^3 + \alpha \quad \checkmark$$

Grad 4:

$$\frac{2}{5} = \alpha + \beta x^4 + \beta x^4 + \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = 1-\beta + \beta x^4 = 1-\beta + \beta\left(1-\frac{2}{3\beta}\right)^2$$

$$= 1-\beta + \beta\left(1 - \frac{4}{3\beta} + \frac{4}{9\beta^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}\frac{1}{\beta} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3+5}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{4}{9}\cdot\frac{15}{8} = \frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Aufgabe 4:

$$\left\| \frac{x^T A x}{x^T x} - \lambda \right\| = \left\| \frac{x^T A x}{x^T x} - \frac{v^T A v}{v^T v} \right\|$$

$$\overset{\|x\| = \|v\|}{=} \frac{1}{\|x\|^2} \left\| x^T A x - x^T A v + x^T A v - v^T A v \right\|$$

$$\leq \frac{1}{\|x\|^2} \left(\| x^T A (x - v) \| + \| (x^T - v^T) A v \| \right)$$

$$\leq \frac{1}{\|x\|^2} \left(\|x\| \, \|A\| \, \|x - v\| + \|x - v\| \cdot \|A\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{= \|x\|} \right)$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \cdot 2 \cdot \|A\| \cdot \|x - v\|$$

Aufgabe 5:

1.)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
0 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & \\
0 & 0 & 1 & \frac{p_1}{2} & \\
\hline
1 & p_2 + 1 & p_2 + 1 & p_2 & p_2 - \frac{p_1}{2}
\end{array}$$

$$\Rightarrow p(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{p_1}{2} \cdot x^2 + \left(p_2 - \frac{p_1}{2}\right) x^3$$

2.)

$$f(p_1, p_2) = 2 + \frac{p_1}{2} \cdot 4 + \left(p_2 - \frac{p_1}{2}\right) \cdot 8$$

$$= 2 + 2p_1 + 8p_2 - 4p_1 = 2 - 2p_1 + 8p_2$$

$$\Rightarrow Df(p_1, p_2) = [-2, \ 8] \quad \Rightarrow \|Df(p_1, p_2)\|_2 = \sqrt{68}$$

Aufgabe 6:

Die Iterationsmatrix ist

$$S = -D^{-1}(L+U) = \dots = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt der erste Schritt

$$x_1 = S x_0 + D^{-1} b$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Konvergenz wegen Diagonaldominanz.

Aufgabe 7:

Das nicht-lineare Ausgleichsproblem ist

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \left\| \begin{bmatrix} g(x_0;a) - y_0 \\ g(x_1;a) - y_1 \\ g(x_2;a) - y_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \min_{a \in \mathbb{R}} \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-a^2} - \frac{2}{4e} \\ e^{-(1-a)^2} - 1 \\ e^{-(2-a)^2} - \frac{8}{4e} \end{bmatrix}}_{=: R(a)} \right\|_2^2 .$$

Wegen

$$DR(a) = \begin{bmatrix} -2a\, e^{-a^2} \\ +2(1-a)\, e^{-(1-a)^2} \\ +2(2-a)\, e^{-(2-a)^2} \end{bmatrix}$$

ist

$$DR(a_0) = \begin{bmatrix} -2\, e^{-1^2} \\ +2\cdot(0)\cdot e^{-0^2} \\ +2(1)\cdot e^{-1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} \\ 0 \\ \frac{2}{e} \end{bmatrix}$$

und

$$R(a_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} - \frac{2}{4e} \\ 1-1 \\ \frac{1}{e} - \frac{8}{4e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2e} \\ 0 \\ -\frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem ist damit

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \| R(a_0) + DR(a_0)(a-a_0)\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2e} \\ 0 \\ -\frac{1}{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{e} \\ 0 \\ \frac{2}{e} \end{bmatrix} (a-1) \right\|_2^2$$

$$= \frac{1}{e^2} \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} a - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{e^2} \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} a - \begin{bmatrix} -2-\frac{1}{2} \\ 0 \\ 2+1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{e^2} \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} a - \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|$$

2.) Normalengleichung:

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^T A = 4 + 4 = 8$$

$$A^T b = (-2) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{A^T b}{A^T A} = \frac{11}{8}$$

Aufgabe 8:

$$\dddot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\ddot{y}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(f(t, y(t), \dot{y}(t))\right)$$

$$= f_t(t, y(t), \dot{y}(t)) + f_y(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

$$+ f_{\dot{y}}(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot f(t, y(t), \dot{y}(t))$$

Aufgabe 9:

$$0 = \dot{a}(t) \cdot \dot{y}(t) + a(t)\, \ddot{y}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{\dot{a}}{a}\dot{y} = -\frac{-2t\, e^{-t^2}}{e^{-t^2}}\dot{y} = 2t \cdot \dot{y}$$

Ordnungsreduktion:

$$v = \dot{y}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ 2t\, v(t) \end{bmatrix} =: f\left(t, \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix}\right) \quad \text{, d.h.}$$

$$f\left(t, \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v \\ 2t \cdot v \end{bmatrix}$$

modifiziertes Euler-Verfahren:

$$k_1 = f\left(0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \cdot 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = f\left(0 + \frac{h}{2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k_1\right)\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + h\,(0 \cdot k_1 + 1 \cdot k_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

Zusatzaufgabe:

Es gilt $\hat{v}$ zu finden mit

$$Y(10, \hat{v}) = 3 \quad , \text{ d.h.}$$

$$0 = f(\hat{v}) := Y(10, \hat{v}) - 3 .$$

Newton:

$$v_{k+1} = v_k - \frac{f(v_k)}{Df(v_k)} \quad , \text{ wobei}$$

$$Df(v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} f(v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} Y(10, v_k) = \psi(10, v_k)$$

Ferner ist $f(v_k) = Y(10, v_k) - 3$, wozu

$$\begin{cases} \ddot{y} = 2t\dot{y} \\ y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_k \end{cases}$$

gelöst werden muss.

Wegen

$$Y(0, v_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(0, v_k) = 0$$

$$\frac{d}{dt} Y(0, v_k) = v_k \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}(0, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_k} v_k = 1$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 Y(t, v_k) = 2t \left(\frac{d}{dt}\right) Y(t, v_k) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\psi}(t, v_k) = 2t\,\dot{\psi}(t, v_k)$$

ist mit $p(t) := \psi(t, v_k)$ dann noch

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) = 2t\,\dot{p}(t) \\ p(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = 1 \end{cases}$$

zu lösen um

$$Df(v_k) = \psi(10, v_k) = p(10)$$ zu erhalten.