Musterlösung zur Klausur

Aufgabe 1: Berechne

$$(6 \tilde{*} x \tilde{+} 2) \tilde{*} x \tilde{+} 1$$

$$\Rightarrow \quad 6 \tilde{*} x = rd(0{,}6) = 0{,}6$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}6 \tilde{+} 2 = rd(2{,}6) = rd(0{,}26) \cdot 10^1$$

$$= 0{,}3 \cdot 10^1$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}3 \cdot 10^1 \tilde{*} 0{,}1 = rd(0{,}3) = 0{,}3$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}3 \tilde{+} 1 = rd(1{,}3) = \underline{\underline{0{,}1 \cdot 10^1}}$$

Aufgabe 2:

$Ly = b, \; Rx = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & & & & 0 \\ 1 & -1 & 2 & & & & 0 \\ 0 & & & 1 & & & 1 \\ 0 & & & & 1 & & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & & & & 0 \\ 1 & -1 & 1 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 & & & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & & & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & -1 & & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & 1 \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \; y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3:

LR-Zerlegung mit partieller Pivotisierung.

Falls man dabei ein 0 Pivotelement hat

$$\rightarrow \det(A) = 0.$$

Sonst $\det(A) = \det(LR \cdot P^{-1}) = \det(r_{11}, \ldots, r_{nn}) \cdot \operatorname{sign}(P).$

Aufgabe 4:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} [1 \cdots n]$$

```
function y = multiply_Q(x)
    n = length(x);
    temp = 0;
    for i = 1:n
        temp = temp + i * x(i);
    end
    y = zeros(n, 1);
    for i = 1:n
        y(i) = temp * i;
    end
end
```

Aufgabe 5:

1.) $\|A\|_1 = \max\{3, 3\} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{2+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \kappa_1(A) = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$$

2.) $A^T A = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{8}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \kappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Aufgabe 6:

$$p(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)(6-7)(6-8)}$$

Aufgabe 7:

```
function diffs = colwise_norm(sol_comp, sol_ref)
    [n, K] = size(sol_comp);
    diffs = zeros(1, K);
    for i = 1:K
        diffs(i) = norm( sol_comp(:,i) - ...
                         sol_ref(:,i));
    end
end
```

Aufgabe 8:

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \Bigg\| \underbrace{\begin{bmatrix} g(x_1;a,b) - y_1 \\ \vdots \\ g(x_4;a,b) - y_4 \end{bmatrix}}_{=: G(a,b)} \Bigg\| = \| G(a,b) \|$$

Taylor: $G(a,b) \approx G(a_0,b_0) + DG(a_0,b_0) \underbrace{\begin{bmatrix} a-a_0 \\ b-b_0 \end{bmatrix}}_{=:\delta}$

mit

$$DG(a_0,b_0) = \begin{bmatrix} b_0 - x_1 & a_0 - x_1 \\ \vdots & \vdots \\ b_0 - x_4 & a_0 - x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}_{=:A}$$

und mit

$$G(a_0,b_0) = \begin{bmatrix} x_1(x_1-5) - y_1 \\ \vdots \\ x_4(x_4-5) - y_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ -17 \\ -21 \end{bmatrix}}_{=:+b}.$$

Zu lösen ist also

$$\min_{\delta \in \mathbb{R}^2} \| A\delta + b \| \quad \text{mit } A, b \text{ wie oben}$$

<u>Zusatzaufgabe</u>: Mit Normalengleichung ist

$$A^T A = \begin{bmatrix} 26 & -14 \\ -14 & 46 \end{bmatrix}, \quad -A^T b = \begin{bmatrix} +57 \\ -193 \end{bmatrix}$$

LR-Zerlegung von $A^T A$ ist $\begin{bmatrix} 26 & -14 \\ -\frac{7}{13} & \frac{500}{13} \end{bmatrix}$

$Ly = -A^T b$

$$\Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 57 \\ -\frac{2110}{13} \end{bmatrix}$$

$Rx = y$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} \left(57 - \frac{14 \cdot 2110}{500}\right)\frac{1}{26} \\ -\frac{2110}{500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{25} \\ -\frac{211}{50} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 9:

1.) Die Verfahrensfunktion ist $\Phi(h) = k_1(h)$

mit $$k_1(h) = f\left(t + \frac{h}{2},\, y + \frac{h}{2} k_1(h)\right)$$

$$\Rightarrow \dot{k}_1(h) = \frac{1}{2} f_t(-) + \frac{1}{2}\left(k_1(h) + h\dot{k}_1(h)\right) f_y(-)$$

$$\Rightarrow \dot{k}_1(0) = \dot{\Phi}(0) = \frac{1}{2}\left(f_t + \dot{y} f_y\right) = \frac{1}{2}\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \tau'(0) = \dot{y} - \Phi(0) = \dot{y} - \dot{y} = 0$$

$\Rightarrow$ Konsistenzordnung ≥ 1

$$\Rightarrow \tau''(0) = \ddot{y} - 2\dot{\Phi}(0) = \ddot{y} - 2 \cdot \frac{1}{2}\ddot{y} = 0$$

$\Rightarrow$ Konsistenzordnung ≥ 2

$$\Rightarrow \ddot{k}_1(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} f_{tt} + \frac{1}{2}\dot{y} f_{yt}\right) + \frac{1}{2} \cdot 2\dot{k}_1(0) f_y + \frac{1}{2}\dot{y}\left(\frac{1}{2} f_{ty} + \frac{1}{2}\dot{y} f_{yy}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(f_{tt} + 2\dot{y} f_{ty} + \dot{y}^2 f_{yy}\right) + \frac{1}{2}\ddot{y} f_y$$

$$= \frac{1}{4}\left(\dddot{y} + \ddot{y} f_y\right)$$

$$\Rightarrow \tau'''(0) = \dddot{y} - 3\ddot{\Phi}(0) = \dddot{y} - \frac{3}{4}\dddot{y} - \frac{3}{4}\ddot{y} f_y \neq 0$$

$\Rightarrow$ Konsistenzordnung < 3

Das Verfahren hat Konsistenzordnung 3.

2.) Das Verfahren ist für die Testgleichung

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi \quad \text{mit} \quad \Phi = k_1 \text{ und}$$

$$k_1 = f\left(-, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)k_1 = \lambda y_k$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{\lambda y_k}{1-\frac{\lambda h}{2}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{h\lambda}{1-\frac{\lambda h}{2}}\right)y_k = \frac{1-\frac{\lambda h}{2}+h\lambda}{1-\frac{\lambda h}{2}}y_k$$

$$= \underbrace{\frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}}}_{=: F(\underbrace{\lambda h}_{=:\mu})} y_k$$

Also ist $\mu \in \mathcal{S}$ genau dann wenn

$$|F(\mu)| < 1 \iff \left|1+\frac{\mu}{2}\right| < \left|1-\frac{\mu}{2}\right| \iff$$

$$\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\left(1+\frac{\bar{\mu}}{2}\right) < \left(1-\frac{\mu}{2}\right)\left(1-\frac{\bar{\mu}}{2}\right) \iff$$

$$1 + \frac{\mu+\bar{\mu}}{2} + \frac{|\mu|^2}{4} < 1 - \frac{\mu+\bar{\mu}}{2} + \frac{|\mu|^2}{4} \iff$$

$$\mathrm{Re}(\mu) < -\mathrm{Re}(\mu) \iff$$

$$2\,\mathrm{Re}(\mu) < 0 \iff \mathrm{Re}(\mu) < 0.$$

Also ist $\mathcal{S} = \mathbb{C}_-$ die linke halb-Ebene.

Aufgabe 10:

Es ist

$$x_{k+1} = x_k + P(b - Ax_k)$$
$$= (I - PA)x_k - Pb$$

eine Fixpunktiteration mit Iterationsmatrix

$$S = (I - PA).$$

Somit folgt Konvergenz für alle x_0, genau dann, wenn

$$1 > \rho(S) = \rho(I - PA),$$

was nach Voraussetzung aber gegeben ist

Aufgabe 11:

Das erste Orthogonalpolynom ist

$$p_1(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle_\omega}{\langle 1, 1\rangle_\omega}.$$

und hat damit die Nullstelle

$$x_1 = \frac{\langle x, 1\rangle_\omega}{\langle 1, 1\rangle_\omega}.$$

Da $\langle 1, 1\rangle_\omega \overset{\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega \text{ ist Skalarprodukt}}{>} 0$ ist also $x_1 > 0$ genau dann, wenn

$$0 < \langle x, 1\rangle_\omega = \int_{-1}^{1} \omega(x)\, x\, dx = -\int_{-1}^{0} \omega(x)|x|\,dx + \int_{0}^{1} \omega(x)|x|\,dx$$

$$(\Longleftrightarrow) \int_{-1}^{0} \omega(x)\,|x|\,dx < \int_{0}^{1} \omega(x)\,|x|\,dx$$

Diese letzte Aussage gilt aber, da wegen der Monotonie von $\omega(x)$ gilt:

$$\int_{-1}^{0} \omega(x)|x|\,dx < \int_{-1}^{0} \omega(0)|x|\,dx = \omega(0)\int_{-1}^{0}|x|\,dx$$

$$= \omega(0)\int_{0}^{1}|x|\,dx = \int_{0}^{1} \omega(0)\,|x|\,dx$$

$$< \int_{0}^{1} \omega(x)\,|x|\,dx .$$