

# Eigenwertprobleme

Numerische Mathematik 1  
WS 2011/12

# Lineare gewöhnliche DGLs

Wärmeleitungsgleichung (nach Ortsdiskretisierung):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),$$

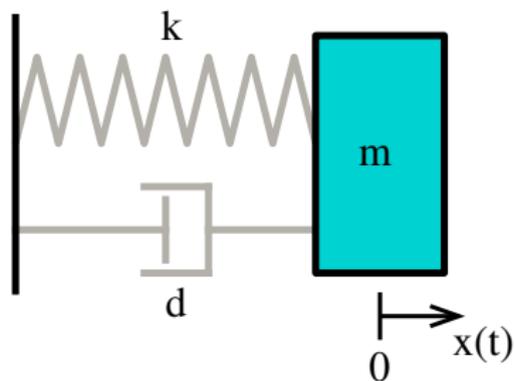
wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  externe Wärmequellen sind und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die gesuchte Wärmeverteilung.

Wellengleichung (nach Ortsdiskretisierung):

$$\ddot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  externe Kräfte sind und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die gesuchte Wellenfunktion.

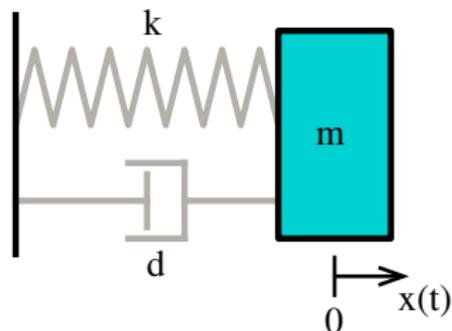
# Masse-Feder-Dämpfer



Es bezeichnen:

- $m \in \mathbb{R}_{>0}$  – die Masse
- $d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  – die Dämpfungskonstante
- $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  – die Federkonstante

# Newton's zweites Gesetz



Es gilt

$$m\ddot{x}(t) = f_{\text{Feder}} + f_{\text{Dämpfer}}$$

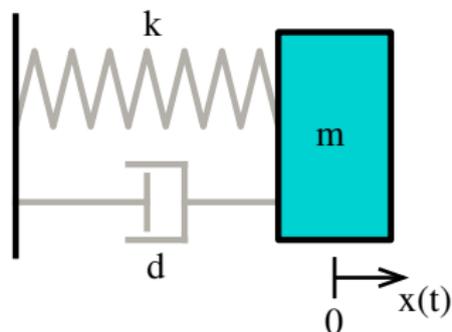
wobei nach dem Hook'schen Gesetz gilt

$$f_{\text{Feder}} = -kx(t),$$

und man für den Dämpfer ansetzen kann

$$f_{\text{Dämpfer}} = -d\dot{x}(t).$$

# Das Masse-Feder-Dämpfer-System

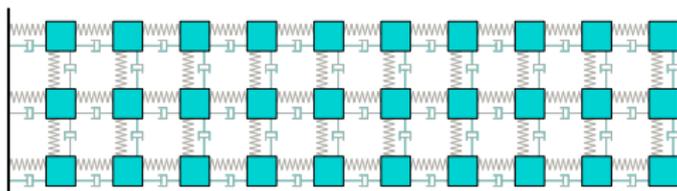


Damit wird das Masse-Feder-Dämpfer-System durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

beschrieben, wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  externe Kräfte darstellen.

# Allgemeiner



Auch kontinuumsmechanische Betrachtungen führen häufig auf Systeme der Form

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t),$$

wobei

- $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  – Massematrix,
- $D \in \mathbb{R}^{n,n}$  – Dämpfungsmatrix und
- $K \in \mathbb{R}^{n,n}$  – Steifigkeitsmatrix

heißen. Wieder sind  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  externe Kräfte und  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die gesuchten Verschiebungen.

# Allgemeines Problem

Wir betrachten nun Differentialgleichungen der Form

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t),$$

mit  $M, D, K \in \mathbb{R}^{n,n}$ .

# Übergang in den Frequenzraum

Ingenieursmethodik:

Man macht man für die homogene Differentialgleichung

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = 0,$$

mit  $M, D, K \in \mathbb{C}^{n,n}$  den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda_0 t} v_0,$$

wobei  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  und  $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

Dies führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = \lambda_0^2 M e^{\lambda_0 t} v_0 + \lambda_0 D e^{\lambda_0 t} v_0 + K e^{\lambda_0 t} v_0 \\ &= \left( \lambda_0^2 M + \lambda_0 D + K \right) e^{\lambda_0 t} v_0, \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$0 = \left( \lambda_0^2 M + \lambda_0 D + K \right) v_0,$$

→ besser: Laplace-Transformation (HA)

# Verallgemeinerter Eigenwert

## Definition

Die komplexe Zahl  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  heißt (*verallgemeinerter*) *Eigenwert* zum (*verallgemeinerten*) *Eigenvektor*  $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  des Matrix Polynoms

$$P(\lambda) := \lambda^2 M + \lambda D + K,$$

falls gilt

$$P(\lambda_0)v_0 = 0.$$

Setzt man

$$M = 0, \quad D = I \quad \text{und} \quad K = -A$$

so heißt  $(\lambda_0, v_0)$  verallgemeinertes Eigenpaar, falls

$$0 = P(\lambda_0)v_0 = \lambda_0^2 Mv_0 + \lambda_0 Dv_0 + Kv_0 = \lambda_0 v_0 - Av_0$$

oder äquivalent

$$Av_0 = \lambda_0 v_0.$$

# Ordnungsreduktion

Ist  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$  invertierbar, so ist

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = \tilde{f}(t),$$

äquivalent zu

$$\ddot{x}(t) + M^{-1}D\dot{x}(t) + M^{-1}Kx(t) = M^{-1}\tilde{f}(t).$$

Ordnungsreduktion liefert damit das System

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}\tilde{f}(t) \end{bmatrix}}_{=:f(t)}.$$

Dies geht mit Polynomen ganz analog.

→ Hausaufgabe

# Das Standard-Eigenwertproblem

Auf dem Computer löst man am Ende meistens nur Eigenwertprobleme der Form

$$\lambda v = Av.$$

→ ARPACK

→ LAPACK: DGEEV

# Potenzmethode (engl. power method)

Wähle  $x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

FOR  $k = 0, 1, \dots$  bis Konvergenz

$$\tilde{x}_{k+1} := Ax_k$$

Falls  $\tilde{x}_{k+1} = 0$ , so ist  $x_k$  Eigenvektor zum EW 0

→ Abbruch

$$x_{k+1} := \frac{\tilde{x}_{k+1}}{\|\tilde{x}_{k+1}\|}$$

Erhöhe  $k = k + 1$ .

END

Falls  $\tilde{x}_k \neq 0$  so gilt

$$x_k = \frac{1}{\|A^k x_0\|} A^k x_0.$$

# Potenzmethode in Eigenvektorbasis

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  diagonalisierbar und  $V \in \mathbb{C}^{n,n}$  invertierbar, sodass

$$V^{-1}AV = J = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}, \quad \left( \Rightarrow J^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^k \end{bmatrix}, \right)$$

wobei  $|d_1| > |d_2| \geq |d_3| \geq \dots \geq 0$  eben diagonal ist. Dann ist

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{\|A^k x_0\|} A^k x_0 = \frac{1}{\|VJ^k V^{-1} x_0\|} VJ^k \underbrace{V^{-1} x_0}_{=: \hat{y}} \\ &= \frac{1}{\|VJ^k \hat{y}\|} VJ^k \hat{y}. \end{aligned}$$

Falls gilt, dass

der erste Eintrag von  $\hat{y}$  ungleich Null ist, (1)

dann dominiert der betragsmäßig größte Eigenwert  $d_1$ .

# Konvergenzsatz

## Theorem

*Es erfüllen die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  der Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  die Bedingungen*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

*Weiter sei  $v$  der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1$ . Der Startwert der Potenzmethode  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  erfüllt die Bedingung (1).*

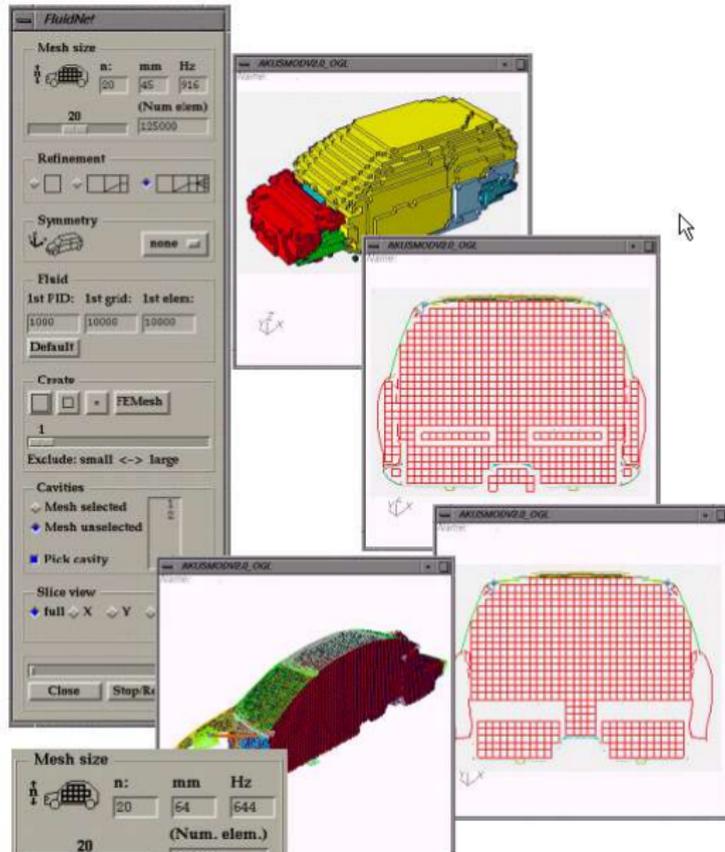
*Dann konvergiert die Potenzmethode linear mit der Rate  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  gegen einen Vektor ( $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ ) im Eigenraum von  $\lambda_1$ .*

Beweis: nicht soo schwer. Im Prinzip vorheriger Slide.



# Strukturanalyse bei Fahrzeugen

von der SFE-Website: <http://www.sfe-berlin.de/> (SFE AKUSMOD)



# Das resultierende Eigenwertproblem

Seien  $M, D, K \in \mathbb{C}^{n,n}$  und setze

$$P(\lambda) := \lambda^2 M + \lambda D + K.$$

Dabei ist  $M$  singulär (aber für fast alle  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  ist  $P(\lambda_0)$  invertierbar).

Aufgabe: Man bestimme  $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$  mit  $v \neq 0$  und

$$\left( \lambda^2 M + \lambda D + K \right) v = 0.$$

# Shift und ...

Sei  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , so dass  $P(\lambda_0)$  regulär ist. Komponentenweise Taylorentwicklung liefert dann

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= P(\lambda_0 + (\lambda - \lambda_0)) \\ &= P(\lambda_0) + P'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2}P''(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2,\end{aligned}$$

wobei wegen  $P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda D + K$  gerade

$$P'(\lambda_0) = 2\lambda_0 M + D$$

$$P''(\lambda_0) = 2M$$

ist.

# ... Invert

Damit ist  $P(\lambda)v = 0$  genau dann wenn

$$\begin{aligned} 0 &= P(\lambda_0)^{-1}P(\lambda)v & (2) \\ &= \left( I + \underbrace{P(\lambda_0)^{-1}P'(\lambda_0)}_{=:A_1}(\lambda - \lambda_0) + \underbrace{P(\lambda_0)^{-1}M}_{=:A_0}(\lambda - \lambda_0)^2 \right) v. \end{aligned}$$

Nimmt man noch an, dass  $(\lambda - \lambda_0) \neq 0$ , setzt

$$\mu := \frac{1}{\lambda - \lambda_0},$$

und multipliziert (2) mit  $\mu^2$ , so ist  $P(\lambda)v = 0$  äquivalent zu

$$0 = \left( \mu^2 I + \mu A_1 + A_0 \right) v.$$

# Reduktion

Schliesslich kann man das Problem 2-ter Ordnung

$$0 = \left( \mu^2 I + \mu A_1 + A_0 \right) v,$$

dann mit der neuen Variablen

$$w = \mu v$$

umschreiben in

$$\underbrace{\mu \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_1 & -A_0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}.$$

# Der Operator

Damit hat man ein Eigenwertproblem der Form

$$\mu X = AX$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_1 & -A_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -P(\lambda_0)^{-1}P'(\lambda_0) & -P(\lambda_0)^{-1}M \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P(\lambda_0)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -(2\lambda_0 M + D) & -M \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

# Die Rücktransformation

Benutzt man die Potenzmethode um den größten Eigenwert  $\mu$  von  $A$  zu berechnen, d.h. das größte  $\mu$  mit

$$\mu v = Av,$$

so ist wegen

$$\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_0}$$

gerade

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\mu}$$

der Eigenwert von  $P(\lambda)$  welcher am nächsten an  $\lambda_0$  liegt, d.h. der am nächsten an  $\lambda_0$  liegende Wert mit

$$0 = P(\lambda)v = \lambda^2 M + \lambda D + K.$$